

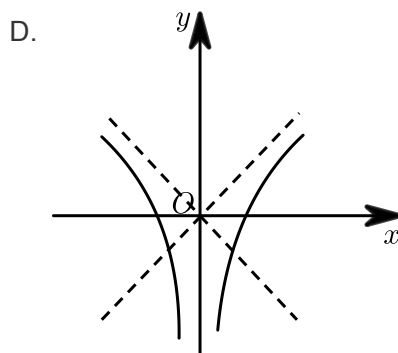
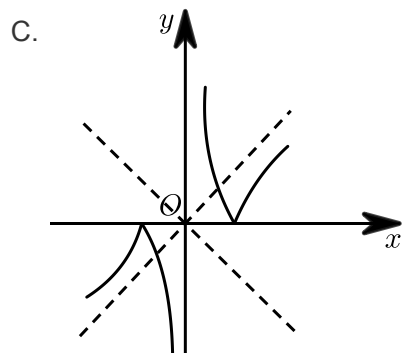
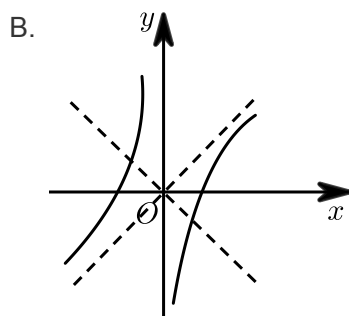
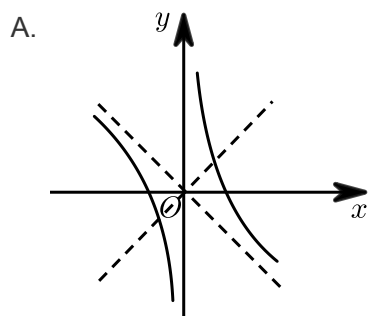
03函数性质综合

1. 函数奇偶性的常见应用

函数图像的辨析

1. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第8题4分 ★★

函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图象为 () .



【答案】 B

【解析】 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 为奇函数，排除 D，
当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单调递增。
故选 B。

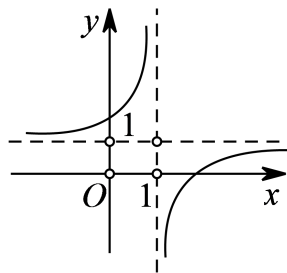
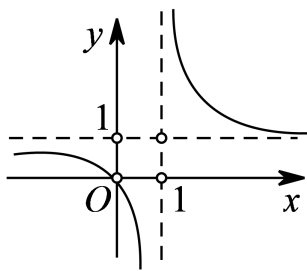
【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题；图象法

2. 2018~2019学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第9题4分 ★★

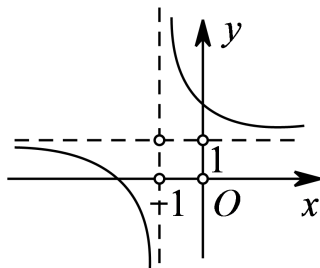
函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象是 () .

A.

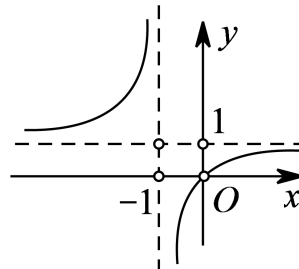
B.



C.



D.



【答案】 B

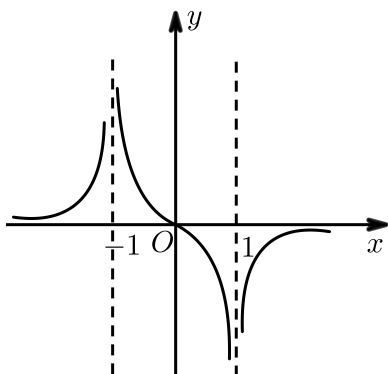
【解析】 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象可看成由函数 $y = \frac{-1}{x}$ 的函数图象先向右平移一个单位为 $y = \frac{-1}{x-1}$ ，再向上平移一个单位变成 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 。故选 B。

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题；图象法

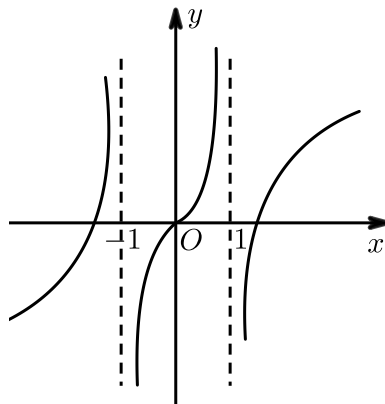
3. 2020~2021学年天津塘沽紫云中学高一上学期期中第7题5分 ★★

我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休。”在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，也常用函数的解析式来琢磨函数图象的特征，如函数 $f(x) = \frac{ex}{1-x^2}$ 的图象大致是（ ）。

A.

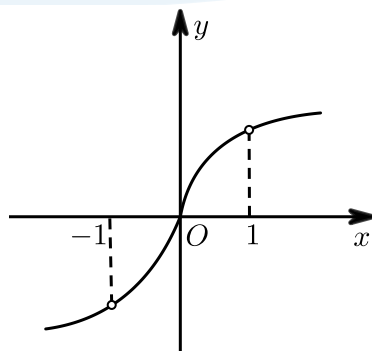
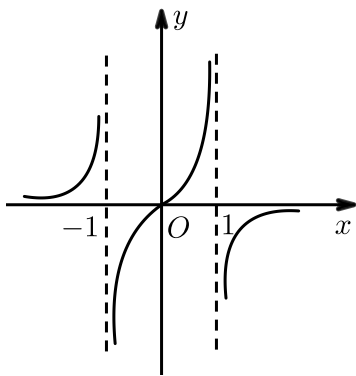


B.



C.

D.



【答案】 C

【解析】 方法一： $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$\therefore f(-x) = \frac{-ex}{1-x^2} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 - x^2 > 0$,

$\therefore f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 - x^2 < 0$,

$\therefore f(x) < 0$,

故选 C.

方法二： A. 函数 $f(x) = \frac{ex}{1-x^2}$ 的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, $x = \frac{1}{2}$ 时,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}e}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2e}{3} > 0, \text{ 对应点在第一象限, 排除 A;}$$

$x > 1$ 时, $f(x) = \frac{ex}{1-x^2} < 0$, 排除选项 BD.

故选 C.

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题；图象法

🔗 加减常数构造奇偶函数

4. 2019~2020 学年天津红桥区高一上学期期中第6题4分 ★★

已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$, 且 $f(a) = 2$, 则 $f(-a) = (\quad)$.

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

【答案】 D

【解析】 令 $g(x) = x + \frac{1}{x} = f(x) + 1$

$g(x)$ 为奇函数, $g(-x) = -g(x)$

$$g(a) = a + \frac{1}{a} = f(a) + 1$$

$$\begin{aligned}
 g(-a) &= -a - \frac{1}{a} = f(-a) + 1 \\
 &= -g(a) \\
 &= -f(a) - 1 \\
 \text{所以 } f(-a) &= -4. \\
 \text{故选 D.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

5. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第7题4分 ★

已知 $f(x) = ax^3 - \frac{b}{x} + 2$, 且 $f(-5) = 17$, 则 $f(5) = (\quad)$.

- A. 13 B. -13 C. 15 D. -15

【答案】 B

【解析】 令 $F(x) = f(x) - 2 = ax^3 - \frac{b}{x}$,
 则 $F(x)$ 为奇函数 ,
 $\therefore F(-5) = f(-5) - 2 = 15$,
 $\therefore F(5) = -F(-5) = -15$.
 又 $\therefore F(5) = f(5) - 2 = -15$,
 $\therefore f(5) = -13$.
 故选 : B .

【标注】【知识点】利用奇偶性求值

6. 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第12题5分 ★★

若函数 $y = f(x)$ 是奇函数 , 且函数 $F(x) = af(x) + bx + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 8 , 则函数 $y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有 () .

- A. 最小值 -8 B. 最大值 -8 C. 最小值 -4 D. 最小值 -6

【答案】 C

【解析】 $\therefore f(x)$ 是奇函数 ,
 $\therefore F(-x) = af(-x) + b(-x) + 2$
 $= -af(x) - bx + 2$,
 $\therefore F(x) + F(-x) = 4$,
 又 $\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $F(x)$ 的最大值为 8 ,
 $\therefore$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 $F(x)$ 的最小值为 -4 .

故选 C .

【标注】【知识点】求抽象函数的最值

 利用函数奇偶性、单调性求解不等式

7. 2018~2019学年10月天津河北区天津市第二中学高一上学期月考第9题5分 ★★

若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $f(m^2 - m + 5)$ 与 $f(3m)$ 的大小关系为 () .

A. $f(m^2 - m + 5) > f(3m)$

B. $f(m^2 - m + 5) < f(3m)$

C. $f(m^2 - m + 5) = f(3m)$

D. 不能确定

【答案】 A

【解析】由单调性定义得: $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{且 } m^2 - m + 5 - 3m$$

$$= m^2 - 4m + 5 > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore m^2 - m + 5 > 3m \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore f(m^2 - m + 5) > f(3m) \text{ 恒成立.}$$

【标注】【知识点】用单调性比较大小

8. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第6题4分 ★

已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 () .

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(0, 1)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

$$\text{且 } f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1),$$

$$\therefore \left|\frac{1}{x}\right| > 1,$$

$$\therefore 0 < |x| < 1,$$

$$\therefore -1 < x < 1 \text{ 且 } x \neq 0.$$

故选 A .

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

2. 分段函数的常见应用

 根据分段函数图像求解不等式

9. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第14题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{|x|+2}$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x^2 - 3x) < f(3 - x)$ 的解集是 _____ .

【答案】 $(0, 3)$

【解析】 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -\frac{x+2}{x-2}, & x < 0 \end{cases}$,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 是常数,

当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 是单调递增,

由 $f(x^2 - 3x) < f(3 - x)$,

得 $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3 - x < 0 \\ x^2 - 3x < 3 - x \end{cases}$,

解得 $0 < x < 3$,

综上所述 $f(x^2 - 3x) < f(3 - x)$ 的解集为 $(0, 3)$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式; 利用函数单调性解不等式

10. 2018~2019学年10月天津河西区天津市第四中学高一上学期月考第14题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(4 - x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-2, \sqrt{5} - 1)$

【解析】 由题可知应满足 $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ 4x^2 > 2x \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} -2 \leq 2 \\ -1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5} \end{cases}$,

$\therefore x \in (-2, \sqrt{5} - 1)$.

故答案为: $(-2, \sqrt{5} - 1)$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

11. 2018~2019学年天津河西区天津市第四中学高一上学期期中第5题3分 ★★

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 0 \\ x + 6, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > f(1)$ 的解集是 () .

A. $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$

【答案】 A

【解析】 解: $f(1) = 3$, 当不等式 $f(x) > f(1)$ 即: $f(x) > 3$,

如果 $x < 0$ 则 $x + 6 > 3$ 可得 $x > -3$, 可得 $-3 < x < 0$.

如果 $x \geq 0$ 有 $x^2 - 4x + 6 > 3$, 可得 $x > 3$ 或 $0 \leq x < 1$.

综上不等式的解集 : $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

故选 A .

【标注】【知识点】分段函数

🔔 零点问题

1. 零点的定义

对于函数 $y = f(x)$, 我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 的值叫做函数 $y = f(x)$ 的零点 .

2. 零点的等价理解

由函数零点的概念可知 , 函数 $y = f(x)$ 的零点也是函数 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标 .

也即 : 方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点 .

12. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第12题4分 ★★★

对实数 a 和 b , 定义运算“ $\otimes$ ” : $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1 \\ b, & a - b > 1 \end{cases}$, 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$. 若

关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有两个不等实根 , 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-1, 1] \cup [2, +\infty)$ B. $(-2, -1] \cup (1, 2]$ C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$ D. $(-2, -1]$

【答案】 B

【解析】 ①当 $(x^2 - 2) - (x - 1) \leq 1$,

即 $-1 \leq x \leq 2$ 时 ,

$$f(x) = x^2 - 2 ,$$

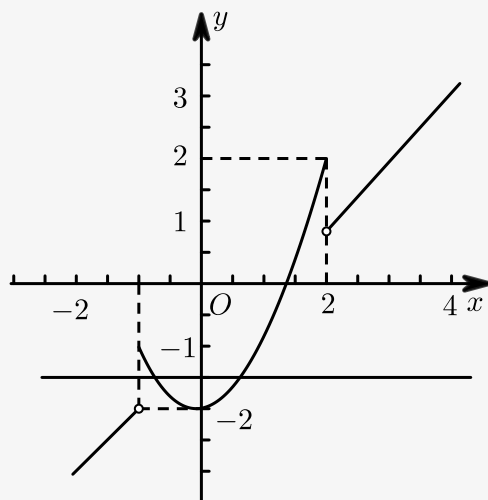
②当 $(x^2 - 2) - (x - 1) > 1$,

即 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时 ,

$$f(x) = x - 1 ,$$

综上 , $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & -1 \leq x \leq 2 \\ x - 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 2 \end{cases}$,

$y = f(x)$ 草图如下 :



$\therefore f(x) = m$ 有 2 个不等实根 ,
 $\therefore y = f(x)$ 与 $y = m$ 有 2 个交点 ,
 则 $m \in (-2, -1] \cup (1, 2]$,
 故选 B .

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

13. 2018~2019学年天津静海区静海区第一中学高一上学期期中第10题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$, 若方程 $f(x) = x$ 有 4 个不同实根, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, \frac{1}{4})$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $(0, \frac{1}{8})$

【答案】 D

【解析】 令 $g(x) = f(x) - x = \begin{cases} x^2 + x + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + x - 2a, & x > 0 \end{cases}$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上是增函数, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

方程 $f(x) = x$ 有 4 个不同实根,

$\therefore g(x)$ 有 4 不同的零点,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a < 0 \\ a > 0 \\ -2a < 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2a > 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < a < \frac{1}{8}.$$

故选 D .

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

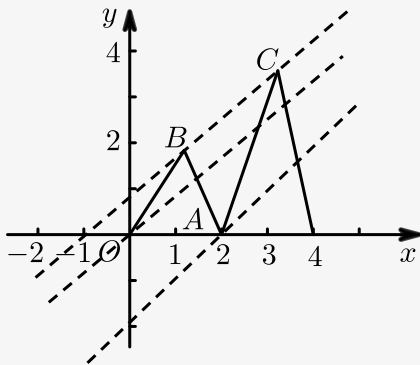
14. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第10题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x - 2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = x + a$ 在区间 $[-2, 4]$ 内有 3 个不等实根，则实数 a 的取值范围 () .

- A. $(-2, 0)$ B. $(-2, 0]$ C. $(-2, 0) \cup [1, 2)$ D. $(-2, 0) \cup \{1\}$

【答案】 D

【解析】 画出函数图象如图所示 .



点 $B(1, 2)$, $C(3, 4)$,

当直线 $y = x + a$ 过 $A(2, 0)$ 点时 ,

与 $f(x)$ 图象有 2 个交点 , 此时 $a = -2$.

当直线 $y = x + a$ 过原点时 ,

与 $f(x)$ 图象有 4 个交点 , 此时 $a = 0$.

则 $a \in (-2, 0)$ 时 , 有 3 个交点 ,

当 $a = 1$ 时 , 直线过点 B , C 有 3 个交点 ,

故 a 的取值范围为 $(-2, 0) \cup \{1\}$.

故选 D .

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

15. 2019~2020 学年 11 月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第 10 题 5 分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left| x + \frac{1}{x} \right| & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x) - (a + 2)f(x) + 2a = 0$ 有三个不同实数解的充要条件是 () .

- A. $a = 2$ B. $a < 2$ C. $a < 0$ D. $a \leq 2$

【答案】 D

【解析】 由 $f^2(x) - (a + 2)f(x) + 2a = 0$, 解得 $f(x) = 2$ 或 $f(x) = a$;

因为 $f(x) = \begin{cases} \left| x + \frac{1}{x} \right| & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}$,

当 $f(x) = 2$ 时, 由 $x = 0$ 或 $x + \frac{1}{x} = \pm 2$,

所以 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$; 共 3 个实根;

又关于 x 的方程 $f^2(x) - (a+2)f(x) + 2a = 0$ 有三个不同实数解,

当 $a = 2$ 时, 显然满足题意;

当 $a \neq 2$, $f(x) = a$ 无解;

又 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$,

所以只需 $a < 2$ 即可;

综上, $a \leq 2$.

故选 D.

【标注】【知识点】一元二次方程根的分布; 已知零点情况求参数的取值范围; 函数零点的概念

3. 二次函数的相关讨论

 定义域为 $\mathbf{R}$

16. 2019~2020 学年天津高一上学期期中六校联考第 12 题 5 分 ★★

若函数 $y = \frac{ax+1}{\sqrt{ax^2-4ax+3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[0, \frac{3}{4}\right)$

【解析】 函数 $y = \frac{ax+1}{\sqrt{ax^2-4ax+3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\therefore ax^2 - 4ax + 3 > 0$ 恒成立,

当 $a = 0$ 时, $3 > 0$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 16a^2 - 12a < 0 \end{cases}$,

解得: $0 < a < \frac{3}{4}$.

综上所述, a 的取值范围是: $\left[0, \frac{3}{4}\right)$.

【标注】【知识点】已知定义域求参数的取值范围

17. 2020~2021 学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第 15 题 4 分 ★★★

已知函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{mx^2 - mx + 3}}$ 的定义域是一切实数, 则 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $0 \leq m < 12$

【解析】 $\because f(x) = \sqrt{\frac{1}{mx^2 - mx + 3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\therefore mx^2 - mx + 3 > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

① $m = 0$ 时,

$3 > 0$, 满足题意;

② $m \neq 0$,

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases},$$

$$m^2 - 4 \times 3m < 0,$$

$$m(m - 12) < 0,$$

$$0 < m < 12,$$

$$\therefore 0 < m < 12,$$

综上: $0 \leq m < 12$.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题; 已知定义域求参数的取值范围

解集为R

18. 2020~2021学年10月天津河北区天津市第十四中学高一上学期月考第28题4分 ★★★

关于 x 的不等式 $x^2 + 4x - a \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $(-\infty, -4]$

【解析】 $\because$ 不等式 $x^2 + 4x - a \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

$$\therefore 16 + 4a \leq 0,$$

$$\text{解得 } a \leq -4,$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -4].$$

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题

19. 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第7题4分 ★★

若不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 ().

A. $-2 < m < 2$

B. $-2 < m \leq 2$

C. $m < -2$ 或 $m \geq 2$

D. $m < 2$

【答案】 B

【解析】 因为不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立,

$$\therefore \text{原不等式等价于: } (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 4 < 0,$$

当 $m = 2$ 时, 对 $x \in \mathbf{R}$, 不等式恒成立,

$$\text{当 } m \neq 2 \text{ 时, 则有: } \begin{cases} m - 2 < 0 \\ \Delta = 4(m - 2)^2 + 16(m - 2) < 0 \end{cases},$$

$$\therefore -2 < m < 2,$$

综上所述， m 的取值范围为： $(-2, 2]$ ，

故选：B.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题

💡 值域型问题

20. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第15题4分 ★★

已知 $g(x) = mx + 2$ ， $f(x) = x^2 - 2x$ ，若对 $\forall x_1 \in [-1, 2]$ ， $\exists x_2 \in [-1, 2]$ ，有 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立，则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

【解析】 $\because f(x) = x^2 - 2x$ ，

$\therefore x_2 \in [-1, 2]$ ，

$\therefore f(x_2) \in [-1, 3]$ ，

又 $\because \forall x_1 \in [-1, 2]$ ， $\exists x_2 \in [-1, 2]$ ，使 $g(x_1) = f(x_2)$ ，

若 $m > 0$ ，则 $g(-1) \geq -1$ ， $g(2) \leq 3$ ，

解得 $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ ，

即 $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ，

若 $m = 0$ ，则 $g(x) = 2$ 恒成立，满足条件；

若 $m < 0$ ，则 $g(-1) \leq 3$ ， $g(2) \geq -1$ ，

解得 $m \geq -1$ ，

即 $-1 \leq m < 0$ 。

综上，满足条件的 m 的取值范围是 $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ 。

故 m 的取值范围是 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 。

故答案为： $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 。

【标注】【知识点】函数的值域；不等式中的恒成立与能成立问题

21. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第17题 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \in [-2, -1) \\ -2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的值域。

(2)

设函数 $g(x) = ax - 2$, $x \in [-2, 2]$, 若对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(2) $\left(-\infty, -\frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $[-2, 1)$ 上是增函数, 此时 $f(x) \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right)$,

当 $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = -2$,

当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上是增函数, 此时 $f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(2) ①若 $a = 0$, $g(x) = -2$, 对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, $f(x_1) \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$,

不存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_0) = f(x_1)$.

②当 $a > 0$ 时, $g(x) = ax - 2$ 在 $[-2, 2]$ 是增函数.

(3) $\therefore$ 函数 $g(x) = ax - 2$, $x \in [-2, 2]$,

①当 $a = 0$ 时 $g(x) = -2$,

对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, $f(x_1) \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$,

$\therefore$ 不存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立,

$\therefore a = 0$ 不符合题意.

②当 $a \neq 0$ 时, $g(x)$ 的值域为 B ,

$\therefore B = [-2|a| - 2, 2|a| - 2]$,

$\therefore$ 对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立,

$\therefore A \subseteq B$,

$\therefore \begin{cases} -2|a| - 2 \leq -\frac{5}{2} \\ 2|a| - 2 \geq \frac{3}{2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} |a| \geq \frac{1}{4} \\ |a| \geq \frac{7}{4} \end{cases}$,

$\therefore |a| \geq \frac{7}{4}$,

$\therefore a \leq -\frac{7}{4}$ 或 $a \geq \frac{7}{4}$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】子集

【知识点】分段函数

【知识点】用单调性观察法求值域

【知识点】利用函数单调性解不等式

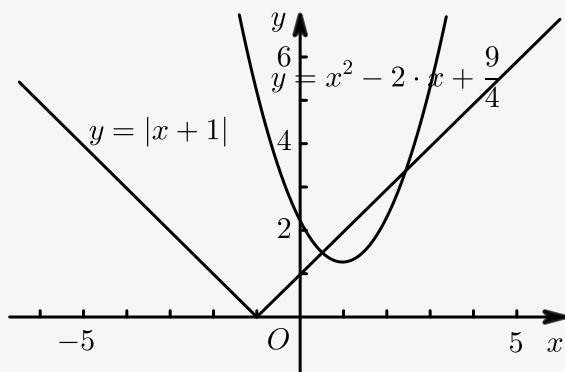
22. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期中第8题4分 ★★★

对 $a, b \in \mathbf{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, a \geq b \\ b, a < b \end{cases}$, 则函数 $f(x) = \max\left\{|x+1|, x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right\}$ ().

- A. 有最大值 $\frac{3}{2}$, 无最小值
B. 有最小值 $\frac{3}{2}$, 无最大值
C. 有最大值 $\frac{1}{2}$, 无最小值
D. 有最小值 $\frac{1}{2}$, 无最大值

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x) = \max\left\{|x+1|, x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right\}$ 是函数 $y = |x+1|$ 与函数 $y = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$ 同一个 x 取得的两个函数值的较大的值; 作函数 $y = |x+1|$ 与函数 $y = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$ 的图象如下:



由图象可知, 令 $x^2 - 2x + \frac{9}{4} = x + 1$ 得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{5}{2}$,
故当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$, 故 $f(x)$ 有最小值 $\frac{3}{2}$, 但没有最大值.
故选 B.

【标注】 【方法】 图象法

【素养】 数学运算

【知识点】 max函数

23. 2018~2019学年10月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第19题 ★★★

已知函数 $f(x)$ 为二次函数, 且 $f(x-1) + f(x) = 2x^2 + 4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 当 $x \in [t, t+2]$, $t \in \mathbf{R}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值 (用 t 表示).

【答案】 (1) $f(x) = x^2 + x + 2$.

(2)
$$f(x)_{\min} = \begin{cases} t^2 + 5t + 8, & t < -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{4}, & -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ t^2 + t + 2, & t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

【解析】 (1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\therefore a(x-1)^2 + b(x-1) + c + ax^2 + bx + c$$

$$= 2ax^2 + (2b - 2a)x + a - b + 2c = 2x^2 + 4,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 2a = 0 \\ a - b + 2c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 2.$$

$$(2) \because f(x) = x^2 + x + 2 \text{ 的对称轴为 } x = -\frac{1}{2};$$

$$\text{当 } t \leq -\frac{1}{2} \leq t+2 \text{ 即 } -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \text{ 时 } f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4};$$

$$\text{当 } t > -\frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = x^2 + x + 2 \text{ 在 } x \in [t, t+2] \text{ 上单调递增,}$$

$$f(x)_{\min} = f(t) = t^2 + t + 2;$$

$$\text{当 } t < -\frac{5}{2} \text{ 时, } f(x) = x^2 + x + 2 \text{ 在 } x \in [t, t+2] \text{ 上单调递减,}$$

$$f(x)_{\min} = f(t+2) = t^2 + 5t + 8;$$

$$\text{综上: } f(x)_{\min} = \begin{cases} t^2 + 5t + 8, & t < -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{4}, & -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ t^2 + t + 2, & t > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】定轴动区间求值域

24. 2016~2017学年天津高二下学期期中理科六校联考第6题5分 ★★

已知函数 $y = \frac{ax^2}{x-1} (x > 1)$ 有最大值 -4 , 则 a 的值为 () .

A. 1

B. -1

C. 4

D. -4

【答案】B

【解析】令 $x-1 = t (t > 0)$, 则 $x = t+1$,

$$\therefore y = \frac{a(t+1)^2}{t} = a \times \left(t + \frac{1}{t} + 2\right),$$

$$\because t > 0,$$

$$\therefore t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

$$\therefore t + \frac{1}{t} + 2 \geq 4,$$

$$\because \text{知函数 } y = \frac{ax^2}{x-1} (x > 1) \text{ 有最大值 } -4,$$

$$\therefore a = -1,$$

故选 B.

【标注】【知识点】用换元法求值域

实数域上恒成立问题

25. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高一上学期月考第11题3分 ★★

若不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立，则 k 的取值范围为 () .

A. $-3 < k < 0$

B. $-3 \leq k < 0$

C. $-3 \leq k \leq 0$

D. $-3 < k \leq 0$

【答案】 D

【解析】 当 $k = 0$ 时， $-\frac{3}{8} < 0$ 恒成立，故满足题意；

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时，} \begin{cases} k < 0 \\ k^2 - 4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\therefore -3 < k < 0 .$$

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $(-3, 0]$.

故选 D .

【标注】 【知识点】不等式的性质；二次函数相关的恒成立问题

26. 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第8题4分 ★★

若函数 $y = (m^2 + 4m - 5)x^2 + 4(1 - m)x + 3 > 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $m = -5$ 或 $1 \leq m < 19$

B. $1 < m < 19$

C. $m = -5$ 或 $1 < m < 19$

D. $1 \leq m < 19$

【答案】 D

【解析】 i $m^2 + 4m - 5 = 0$,

$$(m + 5)(m - 1) = 0 ,$$

$$m = 1 \text{ 或 } -5 ,$$

当 $m = 1$ 时，

$$y = 3 > 0 \text{ 恒成立，}$$

当 $m = -5$ 时，

$$y = 24x + 3 , \text{ 不恒大于 } 0 ,$$

$$\text{ii } m^2 + 4m - 5 \neq 0 ,$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 + 4m - 5 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \\ 16(1 - m)^2 - 12(m^2 + 4m - 5) < 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore 1 < m < 19 ,$$

综上 $1 \leq m < 19$.

故选 D .

【标注】 【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题

27. 2019~2020学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期末第2题4分 ★★

已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 的解集为空集，则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left[-2, \frac{6}{5}\right]$ B. $\left[-2, \frac{6}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{6}{5}, 2\right]$ D. $(-\infty, 2) \cup [2, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 ①当 $a^2 - 4 = 0$ ，即 $a = \pm 2$ 时 .

当 $a = 2$ 时，不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ ，其解集为空集，因此 $a = 2$ 满足题意；

当 $a = -2$ 时，不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 化为 $-4x - 1 \geq 0$ ，即 $x \leq -\frac{1}{4}$ ，其解集不为空集，因此 $a = -2$ 不满足题意，应舍去；

②当 $a^2 - 4 \neq 0$ ，即 $a \neq \pm 2$ 时，

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 的解集为空集，

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 4 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{6}{5} < a < 2,$$

综上可得： a 的取值范围是 $\left(-\frac{6}{5}, 2\right]$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 二次函数相关的恒成立问题；解不等式中的分类讨论；含字母系数的不等式

28. 2020~2021学年10月天津北辰区天津市第四十七中学高一上学期月考第19题14分 ★★★

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$.

当 $a = 2$ 时，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ， $1 \leq m \leq 2$ ，总有 $f(x) - mt + 3t \geq 0$ 成立，求实数 t 的取值范围 .

【答案】 (1) $t \geq -1$.

【解析】 (1) 当 $a = 2$ 时，

$$f(x) = x^2 + 2x + 3,$$

$\therefore$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $1 \leq m \leq 2$ ， $f(x) - mt + 3t \geq 0$ 恒成立，

$\therefore x^2 + 2x + 3 - mt + 3t \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $1 \leq m \leq 2$ 恒成立，

$\therefore \Delta \leq 0$ ，

$$4 - 4(3 - mt + 3t) \leq 0,$$

$1 - 3 + mt - 3t \leq 0$ 对 $\forall m \in [1, 2]$ 恒成立，

$\therefore (3 - m)t \geq -2$ ，

又 $\because m \in [1, 2]$ ，

$\therefore 3 - m > 0$ ，

$\therefore t \geq \frac{-2}{3-m}$ 对 $\forall m \in [1, 2]$ 恒成立，

$\therefore t \geq \left(\frac{-2}{3-m}\right)_{\max} = \frac{-2}{3-1} = -1$ ，

$$\therefore t \geq -1.$$

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题；动轴定区间求值域

确定区间上恒成立问题

29.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第61题

★★

当 $0 \leq x \leq 2$ 时，不等式 $\frac{1}{8}(2t - t^2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq 3 - t^2$ 恒成立，则 t 的取值范围 _____ .

【答案】 $[-1, 1 - \sqrt{3}]$

【解析】 $\because x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$

$\therefore$ 当 $x \in [0, 2]$ 时，

$$(x^2 - 3x + 2)_{\min} = -\frac{1}{4}, \quad (x^2 - 3x + 2)_{\max} = 2,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{8}(2t - t^2) \leq -\frac{1}{4}, \\ 3 - t^2 \geq 2 \end{cases}$$

解得 $-1 \leq t \leq 1 - \sqrt{3},$

$\therefore$ 对于不等式 $\frac{1}{8}(2t - t^2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq 3 - t^2$

对区间 $[0, 2]$ 上任意 x 都成立的实数 t 的取值范围为 $[-1, 1 - \sqrt{3}]$.

【标注】【知识点】一元二次不等式；不等式中的恒成立与能成立问题；函数的值域；二次函数相关的恒成立问题；定轴定区间求值域

30. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测B卷第19题 ★

已知对任意的 $x > 0$ 时不等式 $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立，求 a 的取值范围 .

【答案】 $a \geq \frac{1}{5}.$

【解析】 $\because$ 对 $\forall x > 0, \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立，

$$\therefore a \geq \left(\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \right)_{\max},$$

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 3} \leq \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{5}.$$

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；基本不等式与恒成立问题

31. ★★

已知函数 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - 2$.

(1) 若 $x \in [1, 3]$, $f(x) > 0$ 恒成立 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

(2) 若 $a \in [1, 3]$, $f(x) > 0$ 恒成立 , 则实数 x 的取值范围是 _____ .

【答案】 (1) $a > 2$

(2) $x > 2$ 或 $x < -1$

【标注】【素养】数学运算

32.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第50题

★★

设实数 $a \geq 1$, 使得不等式 $x|x-a| + \frac{3}{2} \geq a$ 对任意的实数 $x \in [1, 2]$ 恒成立 , 则满足条件的实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

【解析】 $\because a \geq 1$, 不等式 $x|x-a| + \frac{3}{2} \geq a$,

对任意的实数 $x \in [1, 2]$ 恒成立 ,

等价于 $x|x-a| \geq a - \frac{3}{2}$,

令 $f(x) = x|x-a|$, 则有 $f_{\min}(x) \geq a - \frac{3}{2}$,

当 $1 \leq a \leq 2$ 时 ,

$f(x) = x|x-a| = \begin{cases} x(x-a), & a \leq x \leq 2 \\ x(a-x), & 1 \leq x < a \end{cases}$,

$\therefore f_{\min}(x) = f(a) = 0$,

$\therefore 0 \geq a - \frac{3}{2}$, 解得 $a \leq \frac{3}{2}$, 故 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$,

当 $a > 2$ 时 , $f(x) = x(a-x)$, 此时 $f_{\min}(x) = f(1)$ 或 $f(2)$,

故有 $\begin{cases} f(1) \geq a - \frac{3}{2} \\ f(2) \geq a - \frac{3}{2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a-1 \geq a - \frac{3}{2} \\ 2a-4 \geq a - \frac{3}{2} \end{cases}$, 解得 $a \geq \frac{5}{2}$,

综上可得 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ 或 $a \geq \frac{5}{2}$.

故答案为 : $\left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】分段函数 ; 含绝对值的不等式 ; 解不等式中的分类讨论 ; 不等式中的恒成立与能成立问题

33.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第30题

★★

若不等式 $x^2 + ax - 2 > 0$ 在区间 $[1, 5]$ 上有解，则 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\frac{23}{5}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{23}{5}, 1\right]$ C. $(1, +\infty)$ D. $\left(-\infty, -\frac{23}{5}\right)$

【答案】 A

【解析】 方法一：∵关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 > 0$ 在区间 $[1, 5]$ 上有解，

$$\therefore a > \frac{2}{x} - x, \quad x \in [1, 5],$$

$$\Leftrightarrow a > \left(\frac{2}{x} - x\right)_{\min}, \quad x \in [1, 5],$$

∵函数 $f(x) = \frac{2}{x} - x$ 在 $x \in [1, 5]$ 单调递减，

∴当 $x = 5$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{23}{5}$ ，

∴实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{23}{5}, +\infty\right)$.

故选 A .

方法二：令函数 $f(x) = x^2 + ax - 2$ ，

若关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 > 0$ 在区间 $[1, 5]$ 上无解，

$$\text{则 } \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(5) \leq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a - 1 \leq 0 \\ 5^2 + 5a - 2 \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a \leq -\frac{23}{5},$$

所以使的关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 > 0$ 在区间 $[1, 5]$ 上有解的 a 的范围是 $\left(-\frac{23}{5}, +\infty\right)$ ，

综上所述，答案为：A .

【标注】 【知识点】 含字母系数的不等式；利用单调性求函数最值；利用四则运算判断函数单调性