

02函数的对称性

1. 函数的对称性

1.函数的对称性

函数的对称性包括**轴对称**与**中心对称**，它们是函数的奇偶性的更一般的形式．

【特别说明】

偶函数是特殊的**轴对称**函数，**奇函数**是特殊的**中心对称**函数．

2.函数的轴对称

一般地，如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称，_____称为 $f(x)$ 的对称轴．

【备注】 【答案】 $f(a+x) = f(a-x)$ ；直线 $x = a$ ；直线 $x = a$

函数值相等

$$f(a+x) = f(a-x)$$

变量之和为 $2a$

3.函数的中心对称

一般地，如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称，_____称为 $f(x)$ 的对称中心．

【备注】 【答案】 $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ ；点 (a, b) ；点 (a, b)

2. 函数的对称性的判定

1.函数轴对称的判定

(1) 定理：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(2) 推论 1：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(3) 推论 2：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

【备注】 【答案】 (1) $f(2a-x) = f(x)$ ；直线 $x = a$
(2) $f(a+x) = f(b-x)$ ；直线 $x = \frac{a+b}{2}$
(3) $f(x) = f(-x)$ ；直线 $x = 0$

2. 函数中心对称的判定

(1) 定理：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，
那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称。

(2) 推论 1：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，
那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称。

(3) 推论 2：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，
那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称。

【备注】 【答案】 (1) $f(2a-x) = 2b - f(x)$ ；点 (a, b)

(2) $f(a+x) + f(a-x) = 0$ ；点 $(a, 0)$

(3) $f(x) + f(-x) = 0$ ；点 $(0, 0)$

轴对称问题

1. ★★

若函数 $f(x)$ 满足： $f(2x+2) - f(2-2x) = 0$ ，则 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 2

【解析】 此题无解析

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题

2. ★★

若函数 $f(x)$ 满足： $f(-x) = f(x-4)$ ，则 $f(x)$ 的图象的对称轴为 _____。

【答案】 (1) $x = -2$

【解析】 (1) 略

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题

3. ★

若函数 $f(x)$ 满足： $f(x+1) - f(1-x) = 0$ ，则 $f(x)$ 的图象的对称轴为 _____。

【答案】 $x = 1$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 满足： $f(x+1) - f(1-x) = 0$ ，

$\therefore f(x+1) = f(1-x)$ ，

则 $f(x)$ 的图象的对称轴为 $x = 1$.

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

4. ★★

若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 且当 $x \leq 1$ 时 $f(x) = (x + 1)^2 - 1$, 则 $x > 1$ 时, $f(x) =$ _____ .

【答案】 $x^2 - 6x + 8$

【解析】 设 $x > 1$, 则 $2 - x < 1$, 于是 $f(2 - x) = (2 - x + 1)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称,

$\therefore f(x) = f(2 - x)$,

故当 $x > 1$ 时 $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题; 解析法

5. ★★

已知实数 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ -x - 2a, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(1 - a) = f(1 + a)$, 则 a 的值为 () .

A. $-\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】 A

【解析】 $a \neq 0$, $f(1 - a) = f(1 + a)$,

当 $a > 0$ 时, $1 - a < 1 < 1 + a$,

则 $f(1 - a) = 2(1 - a) + a = 2 - a$, $f(1 + a) = -(1 + a) - 2a = -1 - 3a$, $\therefore$

$2 - a = -1 - 3a$,

即 $a = -\frac{3}{2}$ (舍);

当 $a < 0$ 时, $1 + a < 1 < 1 - a$,

则 $f(1 - a) = -(1 - a) - 2a = -1 - a$, $f(1 + a) = 2(1 + a) + a = 3a + 2$,

$\therefore -1 - a = 2 + 3a$, 即 $a = -\frac{3}{4}$.

综上可得 $a = -\frac{3}{4}$,

故选 A .

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

6. 2020~2021学年9月重庆渝中区重庆市巴蜀中学高一上学期月考第8题5分 ★

已知定义为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则不等式 $f(x) > 6$ 的解集为 ().

A. $(-2, 3)$

B. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

C. $(-1, 3)$

D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = f(2-x)$, $\therefore f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称,

$\because x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - x$,

$\therefore x^2 - x > 6$, 即 $(x-3)(x+2) > 0$,

$\therefore x < -2$ 或 $x > 3$,

$\because x > 1$,

$\therefore f(x) > 6$ 的解集为 $(3, +\infty)$,

$\because f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称,

$\therefore f(x) > 6$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

故选 D.

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题

7. 2018~2019 学年辽宁大连高一上学期期末第15题5分 ★★

定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 且当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = 2-x$, 若 $f(a) < f(2a-3)$, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$

【解析】 根据 $f(1+x) = f(1-x)$, 可得 $f(x)$ 的函数图象关于直线 $x = 1$ 对称, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时,

$f(x) = 2-x$, 可设 $f(x) = -|x-1| + 1$,

根据 $f(a) < f(2a-3)$, 即可求解.

$\because f(1+x) = f(1-x)$,

$\therefore f(x)$ 的函数图象关于直线 $x = 1$ 对称,

$\therefore$ 函数 $y = f(x+1)$ 关于 y 轴对称,

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = 2-x$,

那么 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) = x$,

可得 $f(x) = -|x-1| + 1$,

由 $f(a) < f(2a-3)$,

得 $-|a-1| + 1 < -|2a-3-1| + 1$,

$\therefore (a-1)^2 > (2a-4)^2$,

解得： $\frac{5}{3} < a < 3$.

故答案为： $(\frac{5}{3}, 3)$.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；一个函数的自对称问题

8. 2015~2016学年湖北武汉武昌区华中师大一附中高二下学期期中理科第16题5分 ★★★

若函数 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值为 _____ .

【答案】 16

【解析】 方法一：∵ 函数 $f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称，

$$\therefore f(-1) = f(-3) = 0 \text{ 且 } f(1) = f(-5) = 0 ,$$

$$\text{即 } [1 - (-3)^2][(-3)^2 + a \cdot (-3) + b] = 0 \text{ 且 } [1 - (-5)^2][(-5)^2 + a \cdot (-5) + b] = 0 ,$$

$$\text{解之得 } \begin{cases} a = 8 \\ b = 15 \end{cases} ,$$

$$\text{因此, } f(x) = (1 - x^2)(x^2 + 8x + 15) = -x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 8x + 15 ,$$

$$\text{求导数, 得 } f'(x) = -4x^3 - 24x^2 - 28x + 8 ,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 , \text{ 得 } x_1 = -2 - \sqrt{5} , x_2 = -2 , x_3 = -2 + \sqrt{5} ,$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, -2 - \sqrt{5}) \text{ 时, } f'(x) > 0 .$$

$$\text{当 } x \in (-2 - \sqrt{5}, -2) \text{ 时, } f'(x) < 0 .$$

$$\text{当 } x \in (-2, -2 + \sqrt{5}) \text{ 时, } f'(x) > 0 .$$

$$\text{当 } x \in (-2 + \sqrt{5}, +\infty) \text{ 时, } f'(x) < 0 .$$

∴ $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2 - \sqrt{5})$ 、 $(-2, -2 + \sqrt{5})$ 上是增函数，在区间 $(-2 - \sqrt{5}, -2)$ 、 $(-2 + \sqrt{5}, +\infty)$ 上是减函数 .

$$\text{又 } \because f(-2 - \sqrt{5}) = f(-2 + \sqrt{5}) = 16 ,$$

∴ $f(x)$ 的最大值为 16 .

方法二：因为函数关于 $x = -2$ 对称，由函数与 x 轴交点坐标知道 ± 1 为解，则还有 -3 ， -5 也为其解，则 $f(x) = (1 - x^2)(x + 3)(x + 5) = (x^2 + 4x + 3)(-x^2 - 4x + 5)$
 $= -(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) + 15$ ，则当 $x^2 + 4x = 1$ 原式取得最大值 16，

故答案为：16 .

【标注】【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）；一个函数的自对称问题

9. 2018~2019学年山东临沂兰山区高一上学期期中第5题5分 ★★

已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2 - x)$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，则 $x_1 + x_2 = (\quad)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】 因为 $f(x) = f(2-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称 , 因为 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$, 所以 $x_1 + x_2 = 2$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题

中心对称问题

10. ★★

函数 $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 的图象关于点 _____ 成中心对称图形 .

【答案】 (2,1)

【解析】 方法一：设 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称 , 则对任意 $x \neq 2$,

都有 $f(x) + f(2a-x) = 2b$ 成立 , 即 $\frac{x}{x-2} + \frac{2a-x}{2a-x-2} = 2b$.

整理得 $(2b-2)x^2 + (4a-4ab)x + 8ab-4a-8b = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 2b-2=0 \\ 4a-4ab=0 \\ 8ab-4a-8b=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 的图象关于点 (2,1) 成中心对称图形 .

方法二： $f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$.

$\therefore f(x) = \frac{2}{x}$ 关于原点成中心对称 ,

$\therefore f(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$ 的图象关于点 (2,1) 成中心对称图形 .

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题

11. 2019~2020 学年浙江杭州西湖区杭州外国语学校高一上学期期中第14题4分 ★★

函数 $y = \frac{2x+3}{x+1}$ 对称中心为 _____ .

【答案】 (-1,2)

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \therefore y &= \frac{2x+3}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)+1}{x+1} \\ &= 2 + \frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 可看作 $y = \frac{1}{x}$ 向左平移 1 个单位 , 然后向上平移 2 个单位而得到的 , $y = \frac{1}{x}$ 的对称中心为 (0,0) ,

$\therefore y = \frac{2x+3}{x+1}$ 的对称中心为 (-1,2) .

故答案为： $(-1, 2)$.

【标注】【知识点】分式函数；一个函数的自对称问题

12. 2018~2019学年江苏苏州昆山市高一上学期期中第5题5分 ★

函数 $y = \frac{x+1}{x+3}$ 的图象对称中心坐标为 _____ .

【答案】 $(-3, 1)$

【解析】 根据题意，函数 $y = \frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = \frac{-2}{x+3} + 1$,
将函数 $y = \frac{-2}{x}$ 向左平移 1 个单位，向上平移 1 个单位得到 $y = \frac{x+1}{x+3}$ 的图象，
又由函数 $y = \frac{-2}{x}$ 的对称中心为 $(0, 0)$,
则函数 $y = \frac{x+1}{x+3}$ 的图象对称中心坐标为 $(-3, 1)$;
故答案为： $(-3, 1)$.

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

13. ★★

若 $f(x+3)$ 的对称中心为 $(2, 1)$, 则函数 $y = f(x-2) + 1$ 图象的对称中心为 _____ .

【答案】 $(7, 2)$

【解析】 $f(x+3)$ 向右平移 5 个单位，再向上平移 1 个单位后得到 $y = f(x-2) + 1$.

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题；平移变换问题

14. ★

若 $f(x+3)$ 的对称中心为 $(2, 1)$, 则函数 $f(-x)$ 图象的对称中心为 _____ . $f(-x+1)$ 图象的对称中心为 _____ .

【答案】 $(-5, 1)$; $(-4, 1)$

【解析】 略

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

15. ★★

- (1) 若函数 $f(x)$ 满足： $f(x+1) + f(1-x) = 0$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____ .
(2) 若函数 $f(x)$ 满足： $f(-x) = -f(x-4)$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____ .

(3) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) + f(2-x) = 2$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____.

【答案】(1) (1,0)

(2) (-2,0)

(3) (2,1)

【解析】(1) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) + f(1-x) = 0$, 则 $f(x+1) = -f(1-x)$, 对称中心的横坐标为 $\frac{x+1+1-x}{2} = 1$, 对称中心的纵坐标为 0.

$\therefore f(x)$ 的图象的对称中心为 (1,0).

(2) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(-x) = -f(x-4)$, 对称中心的横坐标为 $\frac{-x+x-4}{2} = -2$, 对称中心的纵坐标为 0.

$\therefore f(x)$ 的图象的对称中心为 (-2,0).

(3) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) + f(2-x) = 2$, 则对称中心的横坐标为

$\frac{x+2+2-x}{2} = 2$, 对称中心的纵坐标为 $\frac{2}{2} = 1$.

$\therefore f(x)$ 的图象的对称中心为 (2,1).

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

16. 2017~2018学年10月黑龙江哈尔滨香坊区哈尔滨市第六中学高一上学期月考第12题5分 ★★

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 如果 $x_1 < 1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 > 2$, 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的值 ().

A. 恒小于 0

B. 恒大于 0

C. 可能为 0

D. 可正可负函数

【答案】B

【解析】 $\because$ 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 (1,0) 对称,

即 $f(2-x) = -f(x)$,

$x_1 < 1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 > 2$,

则 $x_2 > 2 - x_1 > 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(2-x_1) < f(x_2)$,

$\therefore -f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore f(x_1) + f(x_2) > 0$.

故选: B.

【标注】【知识点】函数对称性与单调性综合问题

3. 两个函数的互对称问题（选讲）

- (1) $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 关于_____对称 .
(2) $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 关于_____对称 .
(3) $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 关于_____对称 .
(4) $y = f(x)$ 与 $y = 2a - f(x)$ 关于_____轴对称 .
(5) $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 关于_____轴对称 .
(6) $y = f(x)$ 与 $y = 2b - f(2a - x)$ 关于_____对称 .
(7) 函数 $y = f(a - x)$ 与 $y = f(x - b)$ 的图像关于_____对称 .

【备注】 【答案】 (1) x 轴 ; (2) y 轴 ; (3) 原点 ;

(4) $y = a$; (5) $x = a$; (6) 点 (a, b) ; (7) 直线 $x = \frac{a+b}{2}$.

并项求和

17. 2017~2018学年10月广东深圳南山区深圳市南山区育才中学高一上学期月考第16题5分 ★★★

若 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, 则

$$f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 4033

【解析】 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{2}{1+x}$,

$$\therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+2}{x+1} = 2 , \quad f(1) = 1 ,$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) \\ = 1 + 2 \times 2016 = 4033 . \end{aligned}$$

故答案为 : 4033 .

【标注】 【知识点】 一个函数的自对称问题 ; 函数求值问题

18. ★★★

设 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, 求 : $f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f(4)$.

【答案】 3

【解析】 $\because f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$,

$$\therefore f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 ,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 \times 3 = 3.$$

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

4. 函数对称性与周期性的综合扩展（选讲）

(1) 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x)$ ($a > 0$) ,

若 $f(x)$ 为奇函数, 则其周期为 $T = 4a$, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则其周期为 $T = 2a$.

(2) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x = a$ 和 $x = b$ ($a < b$) 都对称,

则函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

(3) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于两点 $A(a, y_0)$, $B(b, y_0)$ ($a < b$) 都对称,

则函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

(4) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ ($a < b$) 都对称,

则函数 $f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

19. 2019~2020学年9月安徽高一上学期月考第14题5分 ★

奇函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $f(3) = 2$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 奇函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $f(3) = 2$,

可得 $f(x) + f(2-x) = 0$,

即有 $f(3) + f(-1) = 0$,

则 $f(-1) = -2$,

可得 $f(1) = -f(-1) = 2$.

故答案为: 2.

【标注】【知识点】一个函数的自对称问题

20. 2017~2018学年12月浙江杭州萧山区萧山中学高一上学期月考第7题4分 ★★

已知函数 $f(2x+1)$ 为偶函数, 则 $f(2x)$ 的一条对称轴为 ().

- A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = -\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 因为 $y = f(2x+1) = f\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$, $f(2x) = f\left(2\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$,

所以只要将 $y = f(2x+1)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位即可得到 $y = f(2x)$ 的图象,

因为 $y = f(2x+1)$ 是偶函数,

所以其图象关于 y 轴对称，

而 $y = f(2x)$ 的图象则关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称．

故选：C．

【标注】【知识点】奇偶性；一个函数的自对称问题

21. 2018~2019学年湖北荆州荆州区荆州中学高一上学期期末第16题5分 ★★

函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6) = -f(6-x)$ ， $f(x) = -f(x+3)$ ， $f(1) = a$ ，则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2021) =$ _____．

【答案】 0

【解析】 由题意得：

$$\therefore f(x) = -f(x+3),$$

$$\therefore f(x+3) = -f(x+6) \Rightarrow -f(x) = -f(x+6) \Rightarrow f(x) = f(x+6),$$

$\therefore f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，

$$\therefore f(x+6) = -f(6-x),$$

$$\therefore f(x) + f(6-x) = 0,$$

$f(x)$ 是关于 $(3, 0)$ 中心对称，

$$\text{又 } f(1) = f(7) = a,$$

$$\therefore f(5) = -a,$$

$$\text{又 } f(4) = -f(1) = -a,$$

$$\therefore f(2) = -f(4) = a,$$

$$\text{又 } f(3) + f(3) = 0,$$

$$\therefore f(3) = 0,$$

$$\therefore f(0) = -f(3) = 0 = f(6),$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0,$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2021) = 0.$$

故答案为 0．

【标注】【知识点】函数求值问题；函数对称性与周期性综合问题