

02函数的对称性

1. 函数的对称性

1.函数的对称性

函数的对称性包括**轴对称**与**中心对称**，它们是函数的奇偶性的更一般的形式．

【特别说明】

偶函数是特殊的**轴对称**函数，**奇函数**是特殊的**中心对称**函数．

2.函数的轴对称

一般地，如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称，_____称为 $f(x)$ 的对称轴．

3.函数的中心对称

一般地，如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称，_____称为 $f(x)$ 的对称中心．

2. 函数的对称性的判定

1.函数轴对称的判定

(1) 定理：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(2) 推论 1：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(3) 推论 2：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

2.函数中心对称的判定

(1) 定理：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(2) 推论 1：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

(3) 推论 2：如果对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有_____，

那么函数 $f(x)$ 的图象关于_____对称．

轴对称问题

1. 若函数 $f(x)$ 满足： $f(2x+2) - f(2-2x) = 0$ ，则 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

2.

若函数 $f(x)$ 满足: $f(-x) = f(x-4)$, 则 $f(x)$ 的图象的对称轴为 _____.

3. 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) - f(1-x) = 0$, 则 $f(x)$ 的图象的对称轴为 _____.

4. 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且当 $x \leq 1$ 时 $f(x) = (x+1)^2 - 1$, 则 $x > 1$ 时, $f(x) =$ _____.

5. 已知实数 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x < 1 \\ -x-2a, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(1-a) = f(1+a)$, 则 a 的值为 ().

A. $-\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

6. 已知定义为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则不等式 $f(x) > 6$ 的解集为 ().

A. $(-2, 3)$

B. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

C. $(-1, 3)$

D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

7. 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 且当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) = 2-x$, 若 $f(a) < f(2a-3)$, 则 a 的取值范围是 _____.

8. 若函数 $f(x) = (1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____.

9. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 若 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$, 则 $x_1 + x_2 =$ ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

中心对称问题

10. 函数 $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 的图象关于点 _____ 成中心对称图形.

11. 函数 $y = \frac{2x+3}{x+1}$ 对称中心为 _____.

12. 函数 $y = \frac{x+1}{x+3}$ 的图象对称中心坐标为 _____.

13. 若 $f(x+3)$ 的对称中心为 $(2, 1)$, 则函数 $y = f(x-2) + 1$ 图象的对称中心为 _____.

14. 若 $f(x+3)$ 的对称中心为 $(2, 1)$, 则函数 $f(-x)$ 图象的对称中心为 _____. $f(-x+1)$ 图象的对称中心为 _____.

15.

(1) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) + f(1-x) = 0$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____.

(2) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(-x) = -f(x-4)$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____.

(3) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) + f(2-x) = 2$, 则 $f(x)$ 的图象的对称中心为 _____.

16. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 如果 $x_1 < 1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 > 2$, 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的值 ().

A. 恒小于 0

B. 恒大于 0

C. 可能为 0

D. 可正可负函数

3. 两个函数的互对称问题 (选讲)

- (1) $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 关于_____对称 .
- (2) $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 关于_____对称 .
- (3) $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 关于_____对称 .
- (4) $y = f(x)$ 与 $y = 2a - f(x)$ 关于_____轴对称 .
- (5) $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 关于_____轴对称 .
- (6) $y = f(x)$ 与 $y = 2b - f(2a - x)$ 关于_____对称 .
- (7) 函数 $y = f(a - x)$ 与 $y = f(x - b)$ 的图像关于_____对称 .

并项求和

17. 若 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, 则
 $f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. 设 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, 求: $f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f(4)$.

4. 函数对称性与周期性的综合扩展 (选讲)

- (1) 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x)$ ($a > 0$) ,
 若 $f(x)$ 为奇函数, 则其周期为 $T = 4a$, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则其周期为 $T = 2a$.
- (2) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于直线 $x = a$ 和 $x = b$ ($a < b$) 都对称,
 则函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数 .
- (3) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于两点 $A(a, y_0)$, $B(b, y_0)$ ($a < b$) 都对称,
 则函数 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数 .
- (4) 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象关于 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ ($a < b$) 都对称,
 则函数 $f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数 .
19. 奇函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $f(3) = 2$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
20. 已知函数 $f(2x+1)$ 为偶函数, 则 $f(2x)$ 的一条对称轴为 () .
 A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = -\frac{1}{2}$
21. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6) = -f(6-x)$, $f(x) = -f(x+3)$, $f(1) = a$, 则
 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2021) = \underline{\hspace{2cm}}$.