

01函数周期性

1. 函数周期性

函数周期性的定义

若存在**非零常数** T ，对于函数的定义域内任意一个 x ，都有_____，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**。

如果 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，则此正数称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，有时也简称为**周期**。

【备注】 【答案】 $f(x+T) = f(x)$

【金金备注】并不是所有的周期函数都有最小正周期，如常函数 $f(x)=C$ ，就没有最小正周期

2. 迭代法求解函数周期

🕒 模型1

1. $f(x+a) = -f(x)$

【备注】 【答案】 $T=2a$

【金金备注】推导过程如下题

1. ★★

对于函数 $f(x)$ 对任意 x 都有 $f(x+3) = -f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 周期是_____。

【答案】 6

【解析】 $\because f(x+3) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$ ，

即函数的周期是 6，

故答案为：6。

【标注】 【知识点】 抽象函数；函数周期性判断

2. ★★

已知 $f(x)$ 为周期函数, $f(x+1) = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 最小正周期 T 为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because f(x)$ 是周期函数, $f(x+1) = -f(x)$,
 $\therefore f(x+2) = -f(x+1) = -[-f(x)] = f(x)$,
 $\therefore f(x)$ 的周期是 2 .
故答案为: 2 .

【标注】 【知识点】 函数周期性判断; 抽象函数

🧠 模型2

2. $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$

【备注】 【答案】 $T=2a$

【金金备注】 推导过程如下题

3. ★★

若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{k}{f(x+a)}$ ($k \neq 0$), 求函数 $f(x)$ 的最小正周期 .

【答案】 $2|a|$.

【解析】 $f(x+a) = \frac{k}{f(x+2a)}$,
 $f(x) = \frac{k}{f(x+a)} = \frac{k}{\frac{k}{f(x+2a)}} = f(x+2a)$,
 $|T| = 2|a|$,
故答案为 $2|a|$.

【标注】 【知识点】 抽象函数; 函数周期性判断

4. ★★★

已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$.

(1) 求证 : 函数 $f(x)$ 是周期函数 .

(2) 若 $f(1) = -5$, 求 $f(f(5))$ 的值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{1}{5}$

【解析】 (1) $\because f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$
 $\therefore f(x+4) = \frac{1}{f(x+2)} = \frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的函数 .

(2) 由 (1) 得 $f(5) = f(1) = -5$,

$\therefore f(f(5)) = f(-5) = f(-1)$
 $= \frac{1}{f(-1+2)} = -\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{5}$.

【标注】 【知识点】利用函数周期性求函数值

模型3

3. $f(x+a) = f(x-a)$

【备注】 **【答案】** $T=2a$

【金金备注】 推导过程如下题

5. ★★

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 对任意实数 x 有 $f\left(\frac{3}{2}+x\right) = -f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 成立 .

(1) 证明 $y = f(x)$ 是周期函数 , 并指出其周期 .

(2) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(2) + f(3)$ 的值 .

【答案】 (1) $y = f(x)$ 是周期函数 , 且 $T = 3$ 是其一个周期 , 证明见解析 .

(2) -2 .

【解析】 (1) 由 $f\left(\frac{3}{2}+x\right) = -f\left(\frac{3}{2}-x\right)$,

$$\text{且 } f(-x) = -f(x),$$

$$\text{知 } f(3+x) = f\left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + x\right)\right] = -f\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} + x\right)\right] = -f(-x) = f(x),$$

所以 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $T = 3$ 是其一个周期.

(2) 因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$,

$$\text{且 } f(-1) = -f(1) = -2,$$

又 $T = 3$ 是 $y = f(x)$ 的一个周期,

$$\text{所以 } f(2) + f(3) = f(-1) + f(0) = -2 + 0 = -2.$$

【标注】【知识点】函数周期性与奇偶性综合问题；奇偶性；抽象函数

6. ★★

求下列函数的周期.

$$f(x-3) = f(x+3).$$

【答案】 (1) 6.

【标注】【知识点】周期性的概念及直接判断周期；迭代法判断周期

模型4

$$4. f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$$

【备注】 **【答案】** $T=2a$

【金金备注】 推导过程如下题

7. ★★★

若函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)}$, 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

【答案】 证明见解析.

【解析】 $f(x+a) = \frac{1-f(x+2a)}{1+f(x+2a)},$

$$f(x) = \frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)} = \frac{1-\frac{1-f(x+2a)}{1+f(x+2a)}}{1+\frac{1-f(x+2a)}{1+f(x+2a)}} = f(x+2a),$$

$$|T| = 2|a|.$$

【标注】【知识点】函数周期性判断；抽象函数

8. ★★

已知函数 $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x+k) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, $k \neq 0$, 求证: $f(x)$ 为周期函数, 且 $2k$ 为它的一个周期.

【答案】证明见解析.

【解析】

$$\begin{aligned} \because f(x+2k) &= f(x+k+k) = \frac{1-f(x+k)}{1+f(x+k)} = \frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}} \\ &= \frac{1+f(x)-[1-f(x)]}{1+f(x)+1-f(x)} = f(x), \\ \therefore f(x) &\text{为周期函数, 且 } 2k \text{ 为它的一个周期.} \end{aligned}$$

【标注】【素养】数学抽象

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【知识点】周期性的概念及直接判断周期

🔗 模型5

$$5. f(x+a) = -\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$$

【备注】【答案】 $T=4a$

🔗 模型6

$$6. f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

【备注】【答案】 $T=4a$

3. 变形

模型的变形应用

9. ★★

求下列函数的周期 .

$$f(x+2) = f(x-5) .$$

【答案】 (1) 7 .

【标注】【知识点】函数周期性判断

10. ★★

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)}$ ($f(x) \neq 0$) , 则 $f(x)$ 的周期 $T =$ _____ .

【答案】 $3a$

【解析】 $\because f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)}$,

$$\therefore f(x+a) = \frac{1}{1-f(x)} ,$$

$$\therefore f(x+2a) = \frac{1}{1-f(x+a)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}} = 1 - \frac{1}{1-f(x)} ,$$

$$\therefore f(x+3a) = \frac{1}{1-f(x+2a)} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{1-f(x)}\right)} = f(x) ,$$

$\therefore f(x)$ 是以 $3a$ 为周期的周期函数 .

故答案为 : $3a$.

【标注】【知识点】抽象函数 ; 函数周期性判断

11. ★★★

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2a-x)$, 且 $f(x) = f(2b-x)$, 求 $f(x)$ 的周期 .

【答案】 $2|b-a|$.

【解析】 $f(2a-x) = f(2b-x) \Rightarrow f(t+2a) = f(t+2b) \Rightarrow |T| = 2|b-a|$.

【标注】 【知识点】 函数周期性判断；抽象函数

 直接判断函数周期性

12. ★★

已知 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，那么 $f(2x+1)$ 的周期为 _____ .

【答案】 $\frac{T}{2}$

【解析】 $f(2x+1) = f(2x+1+T) = f\left[2\left(x+\frac{T}{2}\right)+1\right]$.

【标注】 【知识点】 周期性的概念及直接判断周期

13. 2018~2019学年5月天津静海区静海区第一中学高二下学期月考第6题4分 ★★

若函数 $f(x)$ 周期为 3，则 $f(3x-1)$ 的周期为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 周期为 3，

$$\therefore f(x+3) = f(x) ,$$

$$\therefore f[3(x+1)-1] = f(3x+3-1)$$

$$= f(3x-1+3)$$

$$= f[(3x-1)+3]$$

$$= f(3x-1) ,$$

$\therefore$ 函数 $f(3x-1)$ 的周期为 1，

综上所述，答案是：1 .

【标注】 【知识点】 周期性的概念及直接判断周期

4. 周期性的赋值应用

14. 2020~2021学年天津天津塘沽紫云中学高一上学期期中第14题5分 ★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x-5, & (x \geq 7) \\ f(x+4), & (x < 7) \end{cases}$ ，则 $f(3) =$ _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because 3 < 7$,

$$\therefore f(3) = f(7),$$

$$f(7) = 7 - 5 = 2,$$

$$\therefore f(3) = 2.$$

【标注】【知识点】函数求值问题

15. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第14题4分 ★★

设偶函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且当 $x \in [-3, -2]$ 时 $f(x) = 4x$, 则 $f(113.5) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{10}$

【解析】 $\because$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$,

$$\therefore f(x+6) = -\frac{1}{f(x+3)} = f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为 6 的函数,

$$\therefore f(113.5) = f(6 \times 18 + 5.5) = f(5.5) = -\frac{1}{f(2.5)},$$

当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = 4x$, 函数 $f(x)$ 又是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$$\therefore f(-2.5) = 4 \times (-2.5) = -10 = f(2.5),$$

$$\therefore f(113.5) = \frac{1}{10}.$$

故答案为: $\frac{1}{10}$.

【标注】【知识点】利用函数周期性求函数值; 函数周期性与奇偶性综合问题

16. 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第8题3分 ★★

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 且 $f(x+2) = f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$, 则

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = (\quad).$$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x+2) = f(x)$,

$$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{又} \because f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$\because 0 \leq x \leq 1$ 时,

$$f(x) = 2 \times (1 - x),$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

故选 A.

【标注】【知识点】函数周期性与奇偶性综合问题

17. 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第6题5分 ★

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-1, 1)$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ 则 } f(3) = (\quad).$$

A. 3

B. 1

C. 2

D. -2

【答案】 D

【解析】 $\because f(x+2) = f(x)$,

$$\therefore f(x+2+2) = f(x+2) = f(x),$$

$$\therefore f(x+4) = f(x),$$

$$\therefore f(-1-4) = f(-1) = -4 + 2 = -2,$$

$$\therefore f(3) = -2.$$

故选 D.

【标注】【知识点】周期性; 一个函数的自对称问题; 函数求值问题; 分段函数

18. 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第15题4分 ★★

设定义在 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$ 满足 $f(n) = \begin{cases} n+13, & n \leq 2000 \\ f[f(n-18)], & n > 2000 \end{cases}$, 则 $f(2012) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2010

【解析】 定义在 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$ 满足:

$$f(n) = \begin{cases} n+13, & n \leq 2000 \\ f[f(n-18)], & n > 2000 \end{cases}$$

$$\text{故有 } f(2012) = f[f(1994)]$$

$$= f(1994 + 13)$$

$$= f(2007)$$

$$= f[f(1989)]$$

$$= f(1989 + 13)$$

$$= f(2002)$$

$$= f[f(1984)]$$

$$= f(1984 + 13)$$

$$= f(1997)$$

$$= 1997 + 13$$

$$= 2010 .$$

故答案为：2010 .

【标注】【知识点】解析法；函数求值问题；分段函数