

01函数周期性

1. 函数周期性

函数周期性的定义

若存在**非零常数** T ，对于函数的定义域内任意一个 x ，都有_____，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**。

如果 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，则此正数称为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**，有时也简称为**周期**。

2. 迭代法求解函数周期

🧠 模型1

1. $f(x+a) = -f(x)$

1. 对于函数 $f(x)$ 对任意 x 都有 $f(x+3) = -f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 周期是_____。

2. 已知 $f(x)$ 为周期函数， $f(x+1) = -f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 最小正周期 T 为_____。

🧠 模型2

2. $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$

3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{k}{f(x+a)}$ ($k \neq 0$)，求函数 $f(x)$ 的最小正周期。

4. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$ ($f(x) \neq 0$)。

(1) 求证：函数 $f(x)$ 是周期函数。

(2) 若 $f(1) = -5$ ，求 $f(f(5))$ 的值。

 模型3

3. $f(x+a) = f(x-a)$

5. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意实数 x 有 $f\left(\frac{3}{2}+x\right) = -f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 成立.

(1) 证明 $y = f(x)$ 是周期函数, 并指出其周期.

(2) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(2) + f(3)$ 的值.

6. 求下列函数的周期.

$$f(x-3) = f(x+3).$$

 模型4

4. $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$

7. 若函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)}$, 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

8. 已知函数 $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x+k) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, $k \neq 0$, 求证: $f(x)$ 为周期函数, 且 $2k$ 为它的一个周期.

 模型5

5. $f(x+a) = -\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$

模型6

6. $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

3. 变形

模型的变形应用

9. 求下列函数的周期 .

$$f(x+2) = f(x-5) .$$

10. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)}$ ($f(x) \neq 0$) , 则 $f(x)$ 的周期 $T =$ _____ .

11. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2a-x)$, 且 $f(x) = f(2b-x)$, 求 $f(x)$ 的周期 .

直接判断函数周期性

12. 已知 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数 , 那么 $f(2x+1)$ 的周期为 _____ .

13. 若函数 $f(x)$ 周期为 3 , 则 $f(3x-1)$ 的周期为 _____ .

4. 周期性的赋值应用

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x-5, & (x \geq 7) \\ f(x+4), & (x < 7) \end{cases}$, 则 $f(3) =$ _____ .

15. 设偶函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且当 $x \in [-3, -2]$ 时 $f(x) = 4x$, 则 $f(113.5) =$ _____ .

16. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 且 $f(x+2) = f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 , $f(x) = 2x(1-x)$, 则

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = (\quad) .$$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

17. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 , 且满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-1, 1)$ 时 ,

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases} , \text{ 则 } f(3) = (\quad) .$$

A. 3

B. 1

C. 2

D. -2

18. 设定义在 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$ 满足 $f(n) = \begin{cases} n+13, n \leq 2000 \\ f[f(n-18)], n > 2000 \end{cases}$, 则 $f(2012) = \underline{\hspace{2cm}}$.