

04函数奇偶性

1. 函数的奇偶性

1.奇函数偶函数的定义

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____①	关于____②对称
奇函数	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____③	关于____④对称

2.奇函数偶函数的最值

一个奇函数在 $[a, b]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____①，最小值为_____②；

一个偶函数在 $[a, b]$ 上的最大值为 M ，最小值为 m ，则它在 $[-b, -a]$ 上的最大值为_____③，最小值为_____④；

3.奇函数偶函数的单调性

奇函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____①，

偶函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上的单调性_____②。

2. 函数奇偶性的应用

奇偶性、单调性的判断

- 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x+2|}$ 是_____函数（“奇”，“偶”，“非奇非偶”中选一合适的填空）
- 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是（ ）。
A. $f(x)g(x)$ 是偶函数
B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数
C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数
D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数
- 下列函数中，既是奇函数，又在 $(0, +\infty)$ 单调递增的是（ ）。
A. $f(x) = -2x$
B. $f(x) = \frac{1}{x}$
C. $f(x) = x^3$
D. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

4. 已知函数 $f(x) = -x|x| + 2x$, 则下列结论正确的是 () .

- A. $f(x)$ 是偶函数, 递增区间是 $(-\infty, 0)$
- B. $f(x)$ 是偶函数, 递减区间是 $(-\infty, -1)$
- C. $f(x)$ 是奇函数, 递增区间是 $(-\infty, -1)$
- D. $f(x)$ 是奇函数, 递增区间是 $(-1, 1)$

5. 下列判断中哪些是不正确的 () .

- A. $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数
- B. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ -x^2 + x & (x > 0) \end{cases}$ 是奇函数
- C. $f(x) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{x^2-3}$ 是偶函数
- D. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3}$ 是非奇非偶函数

求解析式

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = ()$.

- A. $e^{-x} - 1$
- B. $e^{-x} + 1$
- C. $-e^{-x} - 1$
- D. $-e^{-x} + 1$

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + m, & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$, 则 m 的值为 _____ ; $g(x) =$ _____ .

赋值运算

8. 若 $f(x) = ax^3 + x + c$ 在 $[a, b]$ 上是奇函数, 则 $a + b + c + 2$ 的值为 () .

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

9. 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数, 且 $f(1) = 1$. 若 $g(x) = f(x) + 2$, 则 $g(-1) =$ _____ .

10. 已知 $f(x) = ax^3 + bx - 4$, 其中 a, b 为常数, 若 $f(-2) = 2$, 则 $f(2)$ 的值等于 () .

- A. -2
- B. -4
- C. -6
- D. -10

11. 已知函数 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 8$, 且 $f(-3) = 6$, 则 $f(3) =$ _____ .

12. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数, $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上偶函数, 且 $f(0) + f(-2) + g(0) + g(2) = 4$,

$f(2) + g(0) + g(-2) = -2$, 则 $f(2)$ 的值为 () .

- A. -3
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解不等式

13. 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 则 m 的取值范围是 _____ .

14. 定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 是增函数, 且 $f(a) + f(2a^2 - 1) < 0$, 则 a 的取值范围为 _____ .

15. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 且 $f(-3) = 0$, 则不等式 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集是 _____ .
16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 () .
- A. $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
 B. $(-4, 0) \cup (4, +\infty)$
 C. $(-4, 0) \cup (0, 4)$
 D. $(-4, 4)$
17. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(1) = 0$, 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围为 () .
- A. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$
 B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$
 C. $\{x|0 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$
 D. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
18. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 当 $a, b \in (-\infty, 0)$ 时总有 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0 (a \neq b)$, 若 $f(m+1) > f(2m)$, 则实数 m 的取值范围是 _____ .
19. 设奇函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{3f(x) - 2f(-x)}{5x} < 0$ 的解集为 () .
- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

|| 精进不休 日新月异

20. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时 $f(x) = x^2$, 对任意的 $x \in [a-1, a+1]$, 恒有 $f(x+2a) \geq 3f(x)$, 则实数 a 的最大值为 _____ .

🔗 综合应用

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2}{mx + n}$ 是奇函数, 且 $f(1) = 3$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 m 和 n 的值.
 (2) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上的单调性, 并加以证明.
22. 已知 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+1}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式.
 (2) 判断并证明 $f(x)$ 的单调性.

|| 精进不休 日新月异

23. 设函数 $f(x)$ 是增函数, 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(1) 求 $f(0)$.

(2) 证明 $f(x)$ 奇函数 .

(3) 解不等式 $\frac{1}{2}f(x^2) - f(x) > \frac{1}{2}f(3x)$.

24. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数 , 且 $f(1) = 1$, 若 $a, b \in [-1, 1]$, $a + b \neq 0$ 时 , 有 $\frac{f(a) + f(b)}{a + b} > 0$ 成立 .

(1) 判断 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性 , 并证明 .

(2) 解不等式 : $f(2x - 1) < f(1 - 3x)$.

(3) 若 $f(x) \leq m^2 - 2am + 1$ 对所有的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立 , 求实数 m 的取值范围 .