

04函数奇偶性练习题

奇偶性及单调性的判断

1. 判断下列函数的奇偶性 .

(1) $f(x) = x^2 - 2x$.

(2) $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$.

【答案】 (1) 非奇非偶函数 .

(2) 非奇非偶函数 .

【解析】 (1) 由题意得 $f(x) = x^2 - 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\therefore f(-x) = x^2 + 2x ,$$

$\therefore f(x) = x^2 - 2x$ 为非奇非偶函数 .

(2) 由题意得 $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq -1\}$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$ 为非奇非偶函数 .

【标注】 【知识点】 利用定义判断函数奇偶性

2. 下列函数中 : ① $y = x^2$; ② $y = |x|$; ③ $f(x) = x + \frac{1}{x}$; ④ $y = x^3$ 奇函数数是 _____ .

【答案】 ③④

【解析】 ① 设 $t(x) = x^2$, 则 $t(-x) = (-x)^2 = x^2 = t(x)$,

故函数 $y = x^2$ 为偶函数 , 故①不正确 ;

② 设 $g(x) = |x|$, 则 $g(-x) = |-x| = |x| = g(x)$,

故函数 $y = |x|$ 为偶函数 , 故②不正确 ;

③ 设 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

故函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 为奇函数 , 故③正确 ;

④ 设 $h(x) = x^3$, 则 $h(-x) = -x^3 = -h(x)$,

故函数 $y = x^3$ 为奇函数 , 故④正确 ;

综上所述 , 正确的答案为③④ .

【标注】 【知识点】 利用定义判断函数奇偶性

3. 下列判断正确的是 () .

- A. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ 是奇函数
- B. 函数 $f(x) = (1 - x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数
- C. 函数 $f(x) = 1$ 既是奇函数又是偶函数
- D. 函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ 是非奇非偶函数

【答案】 D

【解析】 A 选项：依题意，函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ 中 $x \neq 2$ ，定义域不关于原点对称

原点对称

函数是非奇非偶函数，故A错误；

B 选项：函数 $f(x) = (1 - x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 中 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ ，

$$\begin{cases} (1+x)(1-x) \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases},$$

$-1 \leq x < 1$ ，定义域不关于原点对称，

函数是非奇非偶函数，故B错误；

C 选项：函数 $f(x) = 1$ 图像关于 y 轴对称是偶函数，故C错误；

D 选项：函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ 是非奇非偶函数，故D正

确；

故选 D.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

求解析式

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$.

求函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的解析式.

【答案】 (1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$.

【解析】 (1) $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$\therefore f(0) = 0$ ，满足解析式 $f(x) = x^2 + 2x$ ，

根据题意，设 $x > 0$ ，则 $-x < 0$ ，则 $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$ ，

又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2x$ ，

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】解析法；利用函数奇偶性求函数解析式；求单调区间

5. 若 $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}; 0$

【解析】 $\because f(x)$ 为偶函数,
 $\therefore$ 定义域关于原点对称,
 $\therefore a-1+2a=0$,
 $\therefore a=\frac{1}{3}$,
 $\because f(x)$ 为偶函数,
 $\therefore$ 函数图象的对称轴为 y 轴,
 $\therefore -\frac{b}{2a}=0$,
 $\therefore b=0$.

【标注】 【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式

赋值运算

6. 已知函数是 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数, 则 $f(g(-1)) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 -15

【解析】 $f[g(-1)] = f[-f(1)] = f(-3) = -f(3) = -15$.

【标注】 【知识点】函数求值问题; 分段函数

7. 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数, 且 $f(1) = 3$, 若 $g(x) = f(x) + 2$, 则 $g(-1) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 $\because y = f(x) + x^2$ 是奇函数,
 $\therefore$ 设 $y = F(x) = f(x) + x^2$.
 $\therefore F(1) = f(1) + 1$
 $= 1 + 1$
 $= 2$,
 $\therefore F(-1) = f(-1) + 1$
 $= -F(1)$
 $= -2$,
 $\therefore f(-1) = -2 - 1 = -3$.

$$\begin{aligned}
 \text{则} \because g(x) &= f(x) + 2, \\
 \therefore g(-1) &= f(-1) + 2 \\
 &= -3 + 2 \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

8. 已知函数 $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx - 3$, $f(-3) = 7$, 则 $f(3)$ 的值为 _____ .

【答案】 -13

【解析】 设 $g(x) = ax^5 - bx^3 + cx$,
 则 $g(x)$ 是奇函数,
 $\therefore g(3) = -g(-3)$,
 $\therefore f(-3) = g(-3) - 3 = 7$, ①
 $f(3) = g(3) - 3$, ②
 ①+②得, $f(3) = -13$,
 故答案为: -13.

【标注】【知识点】函数奇偶性的运算

解不等式

9. 奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的减函数, 则不等式 $f(-x) + f(1 - x^2) < 0$ 的解集为 _____ .

【答案】 $(0, 1)$

【解析】 $\because f(1 - x) + f(1 - x^2) < 0$, $f(1 - x) < -f(1 - x^2)$,
 $\because f(x)$ 为 $(-1, 1)$ 奇函数,
 $\therefore -f(x) = f(-x)$,
 $\therefore -f(1 - x^2) = f(x^2 - 1)$,
 $\therefore f(1 - x) < f(x^2 - 1)$,
 $\because f(x)$ 在 $x \in (-1, 1)$ 减函数,
 $\therefore \begin{cases} 1 - x > x^2 - 1 \\ -1 < 1 - x < 1 \\ -1 < x^2 - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$,
 $\therefore x \in (0, 1)$.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题; 利用函数单调性解不等式

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的偶函数，且在区间 $[0, 1)$ 上单调递减，则不等式 $f(1-3a) < f(2a-1)$ 的解集为 _____ .

【答案】 $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】 $\because f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 是偶函数，

且在 $[0, 1)$ 上递减，

$$f(1-3a) < f(2a-1),$$

$$\therefore \begin{cases} |1-3a| > |2a-1| \\ -1 < 1-3a < 1 \\ -1 < 2a-1 < 1 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{2}{5} < a < \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } a \in \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right).$$

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题；利用函数单调性解不等式

11. 奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增，且 $f(2) = 0$ ，则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为 _____ .

【答案】 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

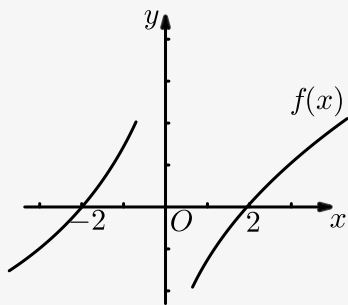
【解析】 根据题意， $f(x)$ 为奇函数，

$$\text{则 } f(2) = -f(-2) = 0,$$

又由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增，

在其 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$ 的草图如图所示：



$$xf(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases},$$

$$\text{解可得: } x < -2 \text{ 或 } x > 2,$$

$$\text{故不等式 } xf(x) > 0 \text{ 的解集为: } (-\infty, 2) \cup (2, +\infty),$$

$$\text{故答案为: } (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

【标注】【知识点】单调性；函数单调性与奇偶性综合问题

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(-3) = 0$, 则不等式 $f(2x - 1) < 0$ 的解集为 ().

- A. $(-1, 2)$
B. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, 2)$
D. $(-1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(-3) = 0$,

$$\therefore f(3) = 0, f(x) = f(|x|),$$

$$\therefore f(|2x - 1|) < f(3) ,$$

$$\therefore |2x - 1| < 3 ,$$

解得 $-1 < x < 2$,

$\therefore$ 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(-1, 2)$.

故选A.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题；抽象函数

13. 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-3, 3)$ 上的减函数, 且满足不等式 $f(x-3) + f(x^2-3) < 0$, 则不等式解集 _____.

【答案】 $(2, \sqrt{6})$

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(x-3) + f(x^2-3) < 0 \text{ 等价于 } f(x-3) < f(x^2-3) = f(3-x^2),$$

$\therefore f(x)$ 是 $(-3, 3)$ 上的减函数,

$$\therefore -3 < 3 - x^2 < x - 3 < 3,$$

$$\therefore 2 < x < \sqrt{6} .$$

故答案为： $(2, \sqrt{6})$.

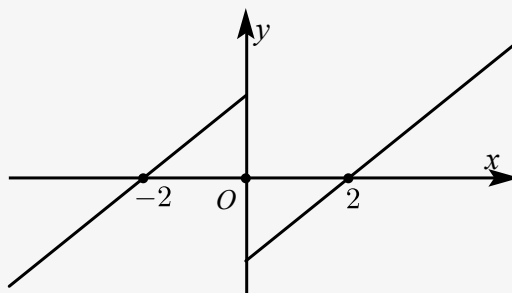
【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

14. 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $f(2) = 0$, 则 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 () .

- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】由奇函数的性质以及特殊点可作出如下简图：



由奇函数定义化简解析式：

$$\frac{f(x) - f(-x)}{x} = \frac{2f(x)}{x} < 0, \text{ 即 } f(x) \text{ 与 } x \text{ 异号}$$

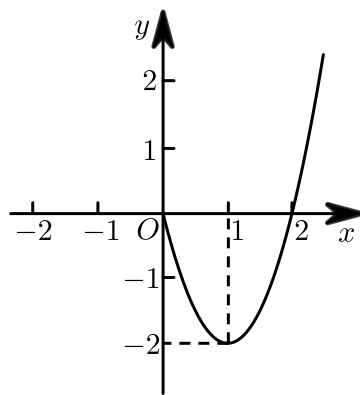
即可，由图像可知当 $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 2$ 时 $f(x)$ 与 x 异号。

故选A。

【标注】【知识点】单调性；函数单调性与奇偶性综合问题

综合应用

15. 若函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x^2 - 4x$ 。



(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式，并补齐函数 $f(x)$ 的图象。

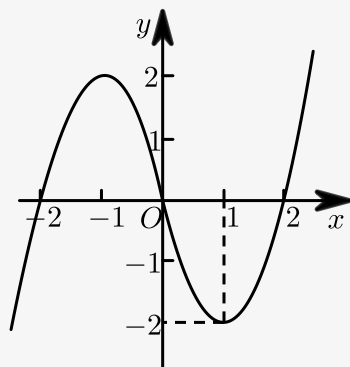
(2) 用定义证明，函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增。

【答案】(1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & x \geq 0 \\ -2x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}$

画图见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) 如图，



当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，

$$\therefore f(-x) = 2x^2 + 4x,$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数，

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\text{即 } f(x) = -f(-x) = -2x^2 - 4x,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & x \geq 0 \\ -2x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}.$$

(2) 任取 $1 \leq x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2)$$

$$= 2x_1^2 - 4x_1 - (2x_2^2 - 4x_2)$$

$$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)$$

$$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2),$$

$$\because 1 \leq x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 - 2 > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$$\therefore \text{函数 } y = f(x) \text{ 在区间 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增}.$$

【标注】【知识点】解析法；利用函数奇偶性求函数解析式；用定义法证明函数的单调性

16. 已知函数 $f(x) = \frac{mx^2 + 3}{x} (m \in \mathbf{R})$, 且 $f(1) = 4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断 $f(x)$ 奇偶性.

(3) 判断 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上的单调性并用单调性定义证明.

【答案】 (1) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}.$

(2) 函数 $f(x)$ 在定义域内为奇函数.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数, 证明见解析.

【解析】 (1) $\because f(1) = 4,$

$$\therefore m + 3 = 4, \therefore m = 1,$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}.$$

(2) 函数 $f(x)$ 在定义域内为奇函数,

$$\text{由 (1) 得 } f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} \text{ 且定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

$$\therefore f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{-x} = -\frac{x^2 + 3}{x} = -f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在定义域内为奇函数.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数,

$$\text{设 } 2 < x_1 < x_2,$$

$$f(x_1) - f(x_2)$$

$$= \frac{x_1^2 + 3}{x_1 x_2} - \frac{x_2^2 + 3}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2},$$

因为 $2 < x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 x_2 > 4$, $x_1 x_2 - 3 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数.

【标注】【知识点】解析法；用待定系数法求解析式；利用定义判断函数奇偶性；用定义法证明函数的单调性

17. 设函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c}$ 是奇函数，其中 $a, b, c \in \mathbf{N}^+$ ，且 $f(1) = 2$, $f(2) < 3$.

(1) 求 a, b, c 的值.

(2) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调性.

【答案】 (1) $a = b = 1, c = 0$.

(2) $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单增.

【解析】 (1) $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(-x) + f(x) = 0,$$

$$\therefore \frac{ax^2 + 1}{bx + c} + \frac{ax^2 + 1}{-bx + c} = 0,$$

$$\text{即 } c = 0,$$

$$\therefore f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx},$$

$$\therefore f(1) = 2,$$

$$\therefore 2 = \frac{a + 1}{b},$$

$$\therefore 2b = a + 1,$$

$$\text{又 } \because f(2) < 3,$$

$$\therefore \frac{4a + 1}{2b} = \frac{4a + 1}{a + 1} < 3,$$

$$\therefore -1 < a < 2,$$

$$\text{又 } \because a \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore a = b = 1, c = 0.$$

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$,

$$\text{设 } x_1 < x_2 \leq -1,$$

$$\therefore \text{设 } f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{1}{x_1} - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \right),$$

$$\because x_1 < x_2 \leq -1,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, 1 - \frac{1}{x_1 \cdot x_2} > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单增.}$$

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性；用定义法证明函数的单调性