

03函数单调性练习题

🔔 单调性的判断

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则下列结论一定正确的是() .

- A. $y = \frac{1}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数
- B. $y = |f(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数
- C. $y = -f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数
- D. $y = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数

🔔 单调性的证明

2. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

证明函数在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 .

3. 设函数 $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, 且 $f(1) = 2$, $f(2) = \frac{5}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 利用定义判断 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上的单调性 .

🔔 求解函数的最值

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 4$.

设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} (1 \leq x \leq 5)$, 若 $g(x)$ 的最小值为2 , 求 $g(x)$ 的最大值 .

🔔 复合函数单调性

5. 判断下列函数的单调性 :

(1) $y = \frac{1}{x^2+1}$.

(2) $y = \frac{1}{x^2-1}$.

6. 判断下列函数的单调性 .

$$y = \sqrt{x+1} .$$

7. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 的单调递增区间是() .

- A. $[4, +\infty)$
- B. $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$
- C. $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
- D. $\left[1, \frac{5}{2}\right) , [4, +\infty)$

8. 函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的单调减区间为 () .

A. $(-\infty, 2]$

B. $[-1, 2]$

C. $[2, +\infty)$

D. $[2, 5]$

分段函数单调性

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x - 4a, & x < 1 \\ ax, & x \geq 1 \end{cases}$, 若对于任意给定的不等实数 x_1, x_2 , 不等式

$(x_1 - x_2) \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax, & x \leq 1 \\ (2a-1)x - 3a + 6, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $[1, 2]$

D. $[1, +\infty)$

11. 给定函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$, 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 用 $M(x)$ 表示 $f(x), g(x)$ 中的较大者, 记为 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 则 $M(x)$ 的最小值为 () .

A. -1

B. 1

C. 2

D. 4

根据函数单调性求解参数取值范围

12. 已知函数 $y = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 () .

A. $[-3, +\infty)$

B. $(-\infty, -3]$

C. $(-\infty, 5]$

D. $[3, +\infty)$

13. 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(-1, 0) \cup (0, 1]$

B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

C. $(0, 1)$

D. $(0, 1]$

14. 已知 $f(x) = \frac{x}{x-a} (x \neq a)$

(1) 若 $a = -2$, 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增.

(2) 若 $a > 0$ 且 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

解不等式

15. 若定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) < f(1-3x)$, 则实数 x 的取值范围是 _____ .

16. 已知函数 $f(x)$ 满足: 对定义域内任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ 成立.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 且有 $f(a^2 - 1) > f(2a + 2)$ 成立, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求关于 x 的不等式 $f(mx^2 + 2mx) < f(x + 2)$ 的解集.