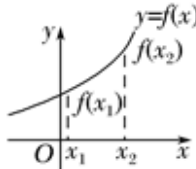
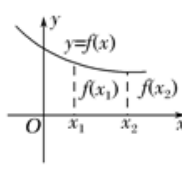


03函数单调性与函数最值

1. 单调函数及最值的概念

1.单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ：如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2	
	当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是_____ ①	当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是_____ ③
图象描述	 自左向右看图象是_____ ②	 自左向右看图象是_____ ④

2.单调区间的定义

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**单调区间**。

【备注】【答案】①增函数；②上升的；③减函数；④下降的

3.函数的最值

前提	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足	
条件	(1)对于任意 $x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ ；	(3)对于任意 $x \in I$ ，都有 $f(x) \geq M$ ；
	(2)存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$	(4)存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$
结论	M 为最大值	M 为最小值

1. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 () .

A. $y = -|x|$

B. $y = x^{\frac{1}{2}}$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = x + \frac{1}{x}$

【答案】 B

【解析】 A选项: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y = -x$, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故A错误;

B选项: $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增, 故B正确;

C选项: $y = \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递减, 故C错误;

D选项: $y = x + \frac{1}{x}$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{5}{2}$, 当 $x = 1$ 时, $y = 2$, 故 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调递增, 故D错误;

故选 B.

【标注】【知识点】求单调区间

|| 精进不休 日新月异

2. 函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且 $f(3) = 4$, 则 () .

A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 3$

B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 3$

C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 2$

D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 2$

【答案】 D

【解析】 设任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1)$$

$$= f((x_2 - x_1) + x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - 1 - f(x_1)$$

$$= f(x_2 - x_1) - 1,$$

$$\because x_2 - x_1 > 0, \text{ 又已知当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > 1,$$

$$\therefore f(x_2 - x_1) > 1,$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上是增函数,}$$

$$\because f(3) = f(1+2)$$

$$= f(1) + f(2) - 1$$

$$= f(1) + [f(1) + f(1) + 1] - 1$$

$$= 3f(1) - 2$$

$$= 4,$$

$$\therefore f(1) = 2.$$

故选D.

【标注】【知识点】抽象函数；单调性

单调性的证明

3. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的图象经过点 $A(0, 1)$, $B\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义证明.

【答案】 (1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

(2) $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意可得 $f(0) = 1$, 可得 $b = 1$,

$$f(1) = \frac{3}{2} \text{ 可得 } a + \frac{1}{2}b = \frac{3}{2},$$

所以 $a = 1$, $b = 1$,

$$\text{即 } f(x) = x + \frac{1}{x+1}.$$

(2) 由 (1) 易知 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{有 } f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{1}{x_1+1} - \left(x_2 + \frac{1}{x_2+1}\right)$$

$$= (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1x_2 + x_1 + x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)},$$

由 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$ 得 $x_1 - x_2 < 0$, $\frac{x_1x_2 + x_1 + x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$,

于是 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】【知识点】用定义法证明函数的单调性

根据单调性求解函数值域

4. 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 1}$, $x \in [4, +\infty)$ 的值域为 _____.

【答案】 $\left(0, \frac{4}{3}\right]$

【解析】略.

【标注】【素养】数学运算

5. 函数 $y = 2 + \frac{x}{x^2 - 2}$, $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 的值域是 _____.

【答案】 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{16}{7}, +\infty\right)$

【解析】 $y = 2 + \frac{x}{x^2 - 2}$,
 $y = 2 + \frac{1}{x - \frac{2}{x}}$,
 $\therefore x$ 越大, $\frac{-2}{x}$ 越大,
 $\therefore x - \frac{2}{x}$ 在 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 为增函数,
 $\therefore x - \frac{2}{x} \in \left[-2, \frac{7}{2}\right]$,
 $\therefore \frac{1}{x - \frac{2}{x}} \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{7}, +\infty\right)$,
 $\therefore 2 + \frac{x}{x^2 - 2} \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{16}{7}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】单调性;用单调性观察法求值域

 求解函数的最值

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} + 2, & x < 0 \\ -x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的最大值是 ().
- A. $2 + 2\sqrt{2}$ B. $2 - 2\sqrt{2}$ C. -1 D. 1

【答案】 B

【解析】 当 $x < 0$ 时, $f(x)_{\max} = f(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$,
当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\max} = f(0) = -1$, 而 $2 - 2\sqrt{2} > -1$,
所以 $f(x)_{\max} = 2 - 2\sqrt{2}$,
故选: B.

【标注】【知识点】利用单调性求函数最值;对勾函数;分段函数

7. 函数 $y = x - \sqrt{1 - 2x}$ 的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】设 $f(x) = x$, $g(x) = -\sqrt{1-2x}$,

则 $1-2x \geq 0$,

解得 $x \leq \frac{1}{2}$,

则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增,

$\therefore y = x - \sqrt{1-2x}$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{1}{2} - \sqrt{1-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$,

故函数 $y = x - \sqrt{1-2x}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】复合函数;利用单调性求函数最值

|| 精进不休 日新月异

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有 ().

A. 最小值 $f(m)$

B. 最大值 $f(n)$

C. 最小值 $f(n)$

D. 最大值 $f\left(\frac{m+n}{2}\right)$

【答案】C

【解析】函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 定义域为 $\mathbf{R}$.

令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = f(0) + f(0)$, 所以 $f(0) = 0$;

再令 $y = -x$, 代入原式得 $f(0) = f(x) + f(-x) = 0$, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 故该函数为奇函数且图象过原点;

设 $x < y$, 则 $x - y < 0$

那么 $f(x - y) > 0$,

得: $f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y)$

即 $f(x) - f(y) > 0$.

$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有最大值为 $f(m)$, 最小值为 $f(n)$.

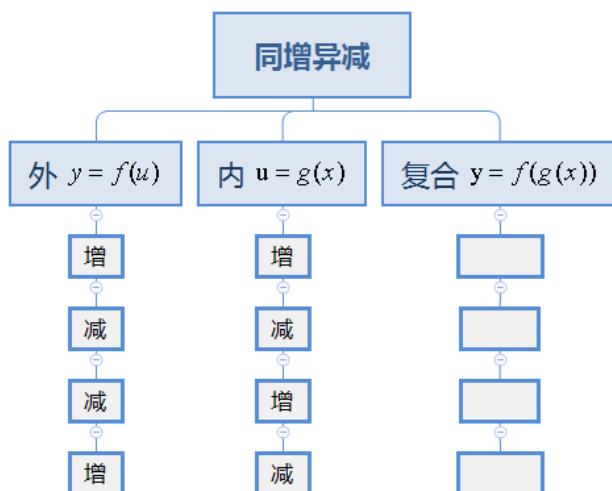
故选: C.

【标注】【知识点】用单调性观察法求值域

2. 复合函数与分段函数的单调性

1. 复合函数单调性

复合函数单调性可简记为“**同增异减**”，即内外函数的单调性相同时递增，相异时递减。



【备注】【教师备注】一般后面学习基本初等函数后考察较多，前期考察较少。

2. 分段函数的单调性：

(1) 方法一：做出图象然后由图象观察

(2) 方法二：若函数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b) \\ f_2(x), & x \in [b, c] \end{cases}$

若要保证 $f(x)$ 在定义域 $[a, c]$ 内单调递增，则需要满足下面三个条件：

① $f_1(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上单调递增；② $f_2(x)$ 在区间 $[b, c]$ 上单调递增；③ $f_1(b) \leq f_2(b)$

复合函数单调性

9. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，下列函数中① $y = [f(x)]^2$ 是增函数② $y = \frac{1}{f(x)}$ 是减函数③ $y = -f(x)$ 是增函数④ $y = |f(x)|$ 是增函数，其中错误的结论是 _____。

【答案】①②④

【解析】①反例， $f(x) = x$ 满足 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上增，

$[f(x)]^2 = x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上先减后增， $\therefore$ ①错；

②反例， $f(x) = x$ 满足 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上增，

$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上减，在 $(0, +\infty)$ 上减，

但在定义域上并不是减函数，故②错；

③ $\because y = f(x)$ 在定义域是减函数，

$\therefore y = -f(x)$ 在定义域上为减函数，故③正确；

④反例， $f(x) = x$ ， $\therefore y = |f(x)| = |x|$ ，

在 $(-\infty, 0)$ 为减函数，在 $[0, +\infty)$ 为增函数，故④错误。

【标注】【知识点】利用四则运算判断函数单调性

10. 判断下列函数的单调性：

$$y = \sqrt{1-x}.$$

【答案】 (1) $(-\infty, 1]$ 单调递减.

【解析】 (1) 定义域为 $(-\infty, 1]$, $\mu = 1-x$ 单调递减, $y = \sqrt{\mu}$ 单调递增,
 $\therefore$ 函数 $y = \sqrt{1-x}$ 在 $(-\infty, 1]$ 单调递减.

【标注】【知识点】复合函数；判断复合函数单调性；求单调区间

11. 判断下列函数的单调性：

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

【答案】 (1) $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) 定义域为 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$,
 $\mu = x^2 - 3x + 2$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, $y = \sqrt{\mu}$ 单调递增,
 $\therefore$ 函数 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】【知识点】复合函数；判断复合函数单调性；求单调区间

12. 函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ 的单调递增区间为 _____.

【答案】 $[-2, 2)$

【解析】 令 $g(x) = -x^2 + 4x + 12 = -(x-2)^2 + 16$,
令 $g(x) \geq 0$, 解得: $-2 \leq x \leq 6$,
而 $g(x)$ 的对称轴是直线 $x = 2$,
故 $g(x)$ 在 $[-2, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 6]$ 上单调递减,
故函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2)$ 上单调递增,
故答案为: $[-2, 2)$.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

13. 判断下列函数的单调性：

$$y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

【答案】 (1) 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递增, 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减.

【解析】 (1) 定义域为 $\mathbf{R}$,

$\mu = x^2 + 4x + 5$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减, 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增, $y = \frac{1}{\mu}$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递增, 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减.

【标注】【知识点】复合函数; 判断复合函数单调性; 求单调区间

14. 判断下列函数的单调性:

$$y = 2 - \frac{3}{\sqrt{4-x}}.$$

【答案】 (1) 函数单调递减.

【解析】 (1) 定义域为 $(-\infty, 4)$, $\mu = 4 - x$ 单调递减, $v = \sqrt{\mu}$ 单调递增, $w = \frac{1}{v}$ 单调递减,

$y = 2 - 3w$ 单调递减,

$\therefore$ 函数单调递减.

【标注】【知识点】复合函数; 判断复合函数单调性; 求单调区间

复合函数的最值

15. 设 $c < 0$, $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的减函数, 下列命题中正确的是().

- A. $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a)$
- B. $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a)$
- C. $f(x) - c$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a) - c$
- D. $cf(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $cf(a)$

【答案】 D

【解析】 A项错误 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最小值为 $f(b)$,

B项错误 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上最小值为 $\frac{1}{f(a)}$,

C项错误 $f(x) - c$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $f(b) - c$, D项正确.

故选D.

【标注】【知识点】利用单调性求函数最值



分段函数单调性

【备注】【教师备注】历年来试卷中出现的次数特别多，引起重视。

本节由于是初学，涉及到的函数以一次函数、二次函数、反比例函数为主。

16. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$ ，则 $f(x)$ 的单调递增区间为 _____ 和 _____。

【答案】 $(-\infty, -1)$ ； $(0, 1)$

【解析】 根据题意 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3 = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3, & x < 0 \end{cases}$

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ，在区间 $[0, 1]$ 上为增函数，在 $(1, +\infty)$ 上为减函数，

当 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ ，在区间 $(-\infty, -1]$ 上为增函数，在 $(-1, 0)$ 上为减函数，

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 。

故答案为： $(-\infty, -1)$ ； $(0, 1)$ 。

【标注】【知识点】分段函数单调性；分段函数

分段函数在实数域上恒单调

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5 & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 满足对任意的 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $[-3, 0]$

B. $[-3, -2]$

C. $(-\infty, -2]$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】 B

【解析】 由题可知， $f(x)$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立，

则说明 $f(x)$ 是单调递增函数， $\therefore \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ -1^2 - a - 5 \leq \frac{a}{1} \end{cases}$ ， $\therefore a \in [-3, -2]$ 。

故选 B。

【标注】【知识点】已知函数单调性求参数范围

18. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + (2-a)x & x \leq 0 \\ (2a-1)x + a-1 & x > 0 \end{cases}$ ，对 R 上的任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，恒有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立，则 a 的取值范围为 _____。

【答案】 $[1, 2]$

【解析】 $\therefore$ 对 R 上的任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，恒有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\therefore \begin{cases} \frac{2-a}{2} \geq 0 \\ 2a-1 > 0 \\ -0^2 + (2-a) \times 0 \leq (2a-1) \times 0 + a-1 \end{cases},$$

解得 $1 \leq a \leq 2$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[1, 2]$.

故答案为 $[1, 2]$.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

19. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 2a, & x \geq 1 \\ ax + 1, & x < 1 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且满足

$f(2a+3) > f(1-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-2, 0)$

B. $\left[-2, -\frac{2}{3}\right)$

C. $[-2, 1]$

D. $\left(-\frac{2}{3}, 1\right]$

【答案】 B

【解析】 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 2a, & x \geq 1 \\ ax + 1, & x < 1 \end{cases}$,

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2a}{-2} \leq 1 \\ a < 0 \\ a+1 \geq -1+2a-2a \end{cases},$$

解得: $-2 \leq a < 0$.

又 $f(2a+3) > f(1-a)$,

$\therefore 2a+3 < 1-a$,

故 $a < -\frac{2}{3}$.

故: $-2 \leq a < -\frac{2}{3}$.

故答案选: B.

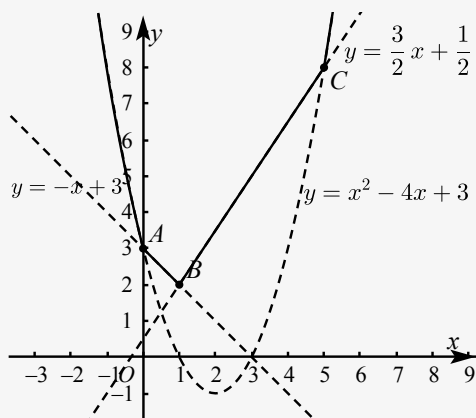
【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式; 已知函数单调性求参数范围

分段函数的最值

20. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 表示 $-x+3$, $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, x^2-4x+3 中的最大者, 则 $f(x)$ 的最小值是 ____.

【答案】 2

【解析】依题意，对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x)$ 表示 $-x+3$ ， $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ ， x^2-4x+3 中的较大者．如图分别画出三个函数的图像，解方程得到三个交点 $A(0,3)$ ， $B(1,2)$ ， $C(5,8)$ ．



观察图像可得函数 $f(x)$ 的表达式： $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 (x \leq 0), \\ -x + 3 (0 < x \leq 1), \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} (1 < x \leq 5), \\ x^2 - 4x + 3 (x > 5). \end{cases}$ 达式： $f(x)$ 的图像

是图中的实线部分，图像的最低点是点 $B(1,2)$ ，所以 $f(x)$ 的最小值是2．

【标注】【素养】数学抽象；数学运算

【知识点】分段函数；求分段函数的最值

【方法】图象法

21. 定义某种运算 $\otimes$ ， $a \otimes b = \begin{cases} |b|, a \geq b \\ a, a < b \end{cases}$ ，设 $f(x) = (0 \otimes x)x - (3 \otimes x)$ ，则 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最小值_____．

【答案】 -12

【解析】 $\because a \otimes b = \begin{cases} |b|, a \geq b \\ a, a < b \end{cases}$ ，
 $\therefore 0 \otimes x = \begin{cases} -x, x \leq 0 \\ 0, x > 0 \end{cases}$ ，

$$3 \otimes x = \begin{cases} |x|, x \leq 3 \\ 3, x > 3 \end{cases}；$$

$$\text{故 } f(x) = (0 \otimes x)x - (3 \otimes x)$$

$$= \begin{cases} -x^2 + x, x \leq 0 \\ -x, 0 < x \leq 3 \\ -3, x > 3 \end{cases}，$$

故当 $x \in [-3, 0]$ 时，

$$f_{\min}(x) = f(-3) = -12；$$

当 $x \in (0, 3]$ 时，

$$f_{\min}(x) = f(3) = -3；$$

故 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最小值为-12.

故答案为：-12．

【标注】【知识点】求复合函数的值域；分段函数；函数求值问题

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围 _____。

【答案】 $[0, 2]$

【解析】 当 $a < 0$ 时， $y = (x-a)^2$ ，

$x \leq 0$ 的最小值为 $y = (a-a)^2 = 0$ ，

当 $a \geq 0$ 时， $y = (x-a)^2$ ，

$x \leq 0$ 时最小值为 $y = (0-a)^2 = a^2$ ，

由 $y = x + \frac{1}{x} + a$ ，

当 $x > 0$ 可得 $\frac{1}{x} > 0$ ，

$\therefore x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ ，当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ ， $x = 1$ 时等号成立，

$\therefore y = x + \frac{1}{x} + a$ ， $x > 0$ 的最小值为 $2 + a$ 。

由 $f(0)$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$ 的最小值可得。

$\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 \leq 2 + a \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 - a - 2 \leq 0 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq a \leq 2$ 。

$\therefore a$ 的取值范围是 $[0, 2]$ 。

综上所述，答案是 $[0, 2]$ 。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念；分段函数；函数求值问题

3. 函数单调性的应用

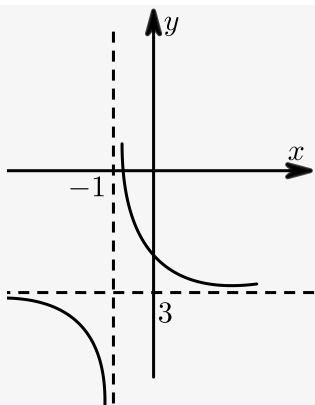
 根据函数单调性求解参数取值范围

23. 函数 $y = \frac{-3x-2}{x+1}$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】 $y = \frac{-3x-2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 3$ ，

图象如下：



$\therefore$ 函数在 $(-\infty, a)$ 上是减函数,

$\therefore a \leq -1$.

【标注】【知识点】已知函数单调性求参数范围；函数的定义域

24. 函数 $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ 在 $[-2, +\infty)$ 上递减, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

【解析】 $m = 0$ 时, $f(x) = -2x + 3$, 在 $\mathbf{R}$ 上递减,

$m \neq 0$ 时, $f(x)$ 是二次函数,

对称轴 $m = \frac{1}{m} \leq -2$, 且 $m < 0$,

得 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$,

综上得: $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

【标注】【知识点】二次函数的图象及性质；利用函数单调性解不等式

25. 若 $f(x) = |-x^2 + (m-1)x + 3 - m|$ 在 $[-1, 0]$ 上是减函数, 则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m \leq -1$ 或 $m \geq 3$

【解析】 $f(x) = |-x^2 + (m-1)x + 3 - m| = |x^2 + (1-m)x + m - 3|$,

$x^2 + (1-m)x + m - 3 = 0$ 的判别式 $\Delta = (1-m)^2 - 4(m-3)$

$= m^2 - 6m + 13$

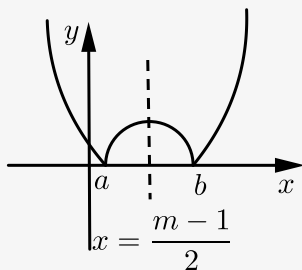
$= (m-3)^2 + 4 > 0$,

$\therefore x^2 + (1-m)x + m - 3 = 0$ 有 2 个不等实根,

设 2 个根为 $a, b (a < b)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上减, 有如下 2 种情况,

① $a \geq 0$,



$$\therefore \frac{-(1-m) - \sqrt{\Delta}}{2} \geq 0,$$

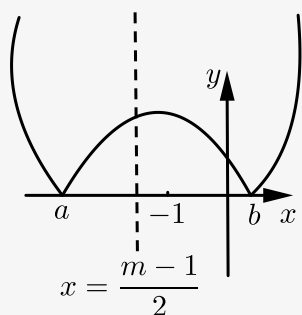
$$\therefore m-1 \geq \sqrt{\Delta},$$

$$\therefore m^2 + 1 - 2m \geq m^2 - 6m + 13,$$

$$\therefore 4m \geq 12,$$

$$\therefore m \geq 3,$$

②



$$\begin{cases} \frac{m-1}{2} \leq -1, \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m \leq -1 \\ \frac{-(1-m) + \sqrt{\Delta}}{2} \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore 1-m \leq \sqrt{\Delta},$$

$$\therefore (m-1)^2 \leq m^2 - 6m + 13,$$

$$\therefore 4m \leq 12,$$

$$\therefore m \leq 3,$$

$$\therefore m \leq -1,$$

综上 $m \leq -1$ 或 $m \geq 3$.

【标注】【知识点】二次函数的图象及性质；利用函数单调性解不等式

26. 已知函数 $f(2x-1) = \frac{x}{2x+a} (a \neq 0)$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求出 $f(x)$ 的解析式并用定义证明 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = \frac{x}{2x-2} (x \neq 1)$; 证明见解析.

(2) $a \geq 4$.

【解析】(1) $\because a = -2$,

$$\therefore f(2x-1) = \frac{x}{2x-2},$$

$$\text{令 } 2x-1 = A,$$

$$\therefore x = \frac{A+1}{2},$$

$$\therefore f(A) = \frac{\frac{A+1}{2}}{\frac{A+1}{2}-2} = \frac{A+1}{2A-2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{x+1}{2x-2},$$

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$,

不妨设 $x_1 > x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1+1}{2x_1-2} - \frac{x_2+1}{2x_2-2} \\ &= \frac{2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 2 - 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 + 2}{(2x_1-2)(2x_2-2)} \\ &= \frac{2(x_2-x_1)}{4(x_1-1)(x_2-1)} < 0, \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

(2) $\because f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单增,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x+a} &= \frac{x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a}{2x+a} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-\frac{a}{2}}{2x+a}, \end{aligned}$$

$\therefore 2x+a > 0$ 对 $\forall x \in (-2, +\infty)$ 恒成立,

$$\therefore -a < (2x)_{\min},$$

$$\therefore -a \leq -4,$$

$$\therefore a \geq 4,$$

$$-\frac{a}{2} < 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

综上 $a \geq 4$.

【标注】【知识点】用换元法求解析式；已知函数单调性求参数范围

解不等式

27. 已知 $f(x) = x^3 + x$, 若 $f(2-a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- B. $(-1, 2)$
- C. $(-2, 1)$
- D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

【答案】 C

【解析】根据题意， $f(x) = x^3 + x$ ，则 $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，
则 $f(2 - a^2) > f(a) \Rightarrow 2 - a^2 > a \Rightarrow a^2 + a - 2 < 0$ ，
解可得： $-2 < a < 1$ ，即 a 的取值范围为 $(-2, 1)$ 。
故选：C。

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用函数单调性解不等式

28. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 实数 a 使得 $f(1 - ax - x^2) < f(2 - a)$ 对于任意 $x \in [0, 1]$ 都成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, 1)$ B. $[-2, 0]$
C. $(-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$ D. $[0, 1]$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增,

$$f(1-ax-x^2) < f(2-a) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 恒成立,}$$
$$\therefore 1 - ax - x^2 < 2 - a \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上恒成立,}$$

即 $q(x) = x^2 + ax - a + 1$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值大于0即可,

①当 $-\frac{a}{2} < 0$ 即 $a > 0$ 时,

$$g(x)_{\min} = g(0) = 1 - a > 0,$$
$$\therefore 0 < a < 1 ;$$

②当 $0 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ 即 $-2 \leq a \leq 0$ 时,

$$g(x)_{\min} = g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - a + 1 > 0,$$
$$\therefore -2 \leq a \leq 0 ;$$

③当 $-\frac{a}{2} > 1$ 即 $a < -2$ 时,

$$g(x)_{\min} = g(1) = 2 > 0 ,$$
$$\therefore a < -2.$$

综上 $a < 1$.

故选A.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；解不等式中的分类讨论