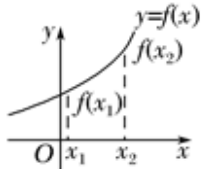
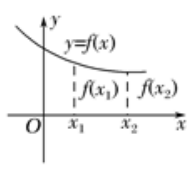


03函数单调性与函数最值

1. 单调函数及最值的概念

1.单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数$f(x)$的定义域为I：如果对于定义域I内某个区间D上的任意两个自变量的值x_1, x_2	
	当$x_1 < x_2$时，都有$f(x_1) < f(x_2)$，那么就说函数$f(x)$在区间D上是_____ ①	当$x_1 < x_2$时，都有$f(x_1) > f(x_2)$，那么就说函数$f(x)$在区间D上是_____ ③
图象描述	 自左向右看图象是_____ ②	 自左向右看图象是_____ ④

2.单调区间的定义

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**单调区间**。

3.函数的最值

前提	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足	
条件	(1)对于任意$x \in I$，都有$f(x) \leq M$； (2)存在$x_0 \in I$，使得$f(x_0) = M$	(3)对于任意$x \in I$，都有$f(x) \geq M$； (4)存在$x_0 \in I$，使得$f(x_0) = M$
结论	M 为最大值	M 为最小值

单调性的判断

1. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是（ ）。

A. $y = -|x|$

B. $y = x^{\frac{1}{2}}$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = x + \frac{1}{x}$

|| 精进不休 日新月异

2. 函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且 $f(3) = 4$, 则 () .
- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 3$
- B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 3$
- C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 且 $f(1) = 2$
- D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且 $f(1) = 2$

🔔 单调性的证明

3. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的图象经过点 $A(0, 1)$, $B\left(1, \frac{3}{2}\right)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义证明.

🔔 根据单调性求解函数值域

4. 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 1}$, $x \in [4, +\infty)$ 的值域为 _____.
5. 函数 $y = 2 + \frac{x}{x^2 - 2}$, $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 的值域是 _____.

🔔 求解函数的最值

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} + 2, & x < 0 \\ -x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的最大值是 () .
- A. $2 + 2\sqrt{2}$ B. $2 - 2\sqrt{2}$ C. -1 D. 1
7. 函数 $y = x - \sqrt{1 - 2x}$ 的最大值为 _____.

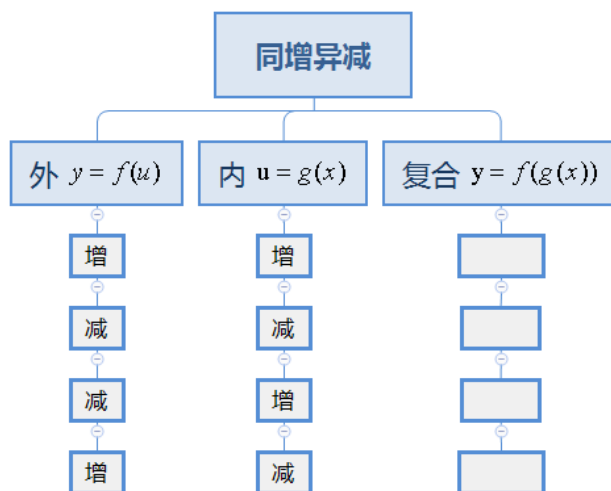
|| 精进不休 日新月异

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有 () .
- A. 最小值 $f(m)$ B. 最大值 $f(n)$
- C. 最小值 $f(n)$ D. 最大值 $f\left(\frac{m+n}{2}\right)$

2. 复合函数与分段函数的单调性

1. 复合函数单调性

复合函数单调性可简记为“**同增异减**”, 即内外函数的单调性相同时递增, 相异时递减.



2. 分段函数的单调性：

(1) 方法一：做出图象然后由图象观察

(2) 方法二：若函数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b) \\ f_2(x), & x \in [b, c] \end{cases}$ ，

若要保证 $f(x)$ 在定义域 $[a, c]$ 内单调递增，则需要满足下面三个条件：

① $f_1(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上单调递增；② $f_2(x)$ 在区间 $[b, c]$ 上单调递增；③ $f_1(b) \leq f_2(b)$

复合函数单调性

9. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，下列函数中① $y = [f(x)]^2$ 是增函数② $y = \frac{1}{f(x)}$ 是减函数③ $y = -f(x)$ 是增函数④ $y = |f(x)|$ 是增函数，其中错误的结论是 _____。

10. 判断下列函数的单调性：

$$y = \sqrt{1-x}.$$

11. 判断下列函数的单调性：

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

12. 函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ 的单调递增区间为 _____。

13. 判断下列函数的单调性：

$$y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

14. 判断下列函数的单调性：

$$y = 2 - \frac{3}{\sqrt{4-x}}.$$

复合函数的最值

15. 设 $c < 0$ ， $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的减函数，下列命题中正确的是 ()。

A. $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a)$

B. $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a)$

- C. $f(x) - c$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $f(a) - c$
 D. $cf(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最小值 $cf(a)$

分段函数单调性

16. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 _____ 和 _____.

分段函数在实数域上恒单调

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5 & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 满足对任意的 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $[-3, 0)$ B. $[-3, -2]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, 0)$
18. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + (2-a)x & x \leq 0 \\ (2a-1)x + a-1 & x > 0 \end{cases}$, 对 R 上的任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 恒有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立, 则 a 的取值范围为 _____.
19. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 2a & x \geq 1 \\ ax + 1 & x < 1 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且满足 $f(2a+3) > f(1-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $[-2, 0)$ B. $\left[-2, -\frac{2}{3}\right)$
 C. $[-2, 1]$ D. $\left(-\frac{2}{3}, 1\right]$

分段函数的最值

20. 对于任意 $x \in R$, 函数 $f(x)$ 表示 $-x + 3, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, x^2 - 4x + 3$ 中的最大者, 则 $f(x)$ 的最小值是 _____.
21. 定义某种运算 $\otimes, a \otimes b = \begin{cases} |b|, & a \geq b \\ a, & a < b \end{cases}$, 设 $f(x) = (0 \otimes x)x - (3 \otimes x)$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最小值 _____.
22. 已知 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围 _____.

3. 函数单调性的应用

根据函数单调性求解参数取值范围

23. 函数 $y = \frac{-3x-2}{x+1}$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.
24. 函数 $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ 在 $[-2, +\infty)$ 上递减, 则实数 m 的取值范围是 _____.
25. 若 $f(x) = |-x^2 + (m-1)x + 3 - m|$ 在 $[-1, 0]$ 上是减函数, 则 m 的取值范围是 _____.
26. 已知函数 $f(2x-1) = \frac{x}{2x+a} (a \neq 0)$.

- (1) 当 $a = -2$ 时, 求出 $f(x)$ 的解析式并用定义证明 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

 解不等式

27. 已知 $f(x) = x^3 + x$, 若 $f(2 - a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
B. $(-1, 2)$
C. $(-2, 1)$
D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
28. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 实数 a 使得 $f(1 - ax - x^2) < f(2 - a)$ 对于任意 $x \in [0, 1]$ 都成立, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 1)$
B. $[-2, 0]$
C. $(-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$
D. $[0, 1]$