

05函数性质综合练习题

🕒 定义域、值域为R

1. ★★

函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 3)$.

(1) 若 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

(2) $(-\infty - \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} + \infty)$.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立. 故对应的判别式 $\Delta = 4(a^2 - 3) < 0$, 解得实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

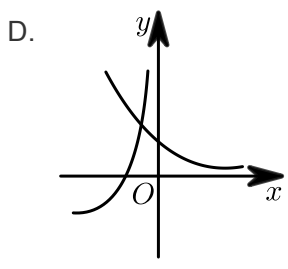
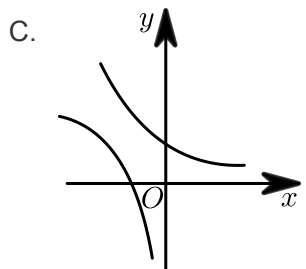
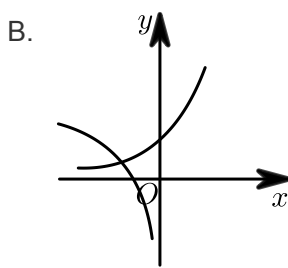
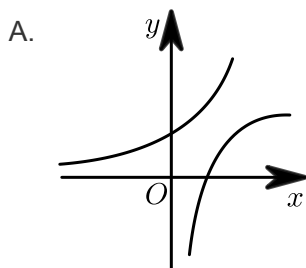
(2) $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 说明 $u = x^2 - 2ax + 3$ 可以取遍所有正实数, 故对应的判别式 $\Delta = 4(a^2 - 3) \geq 0$, 解得实数 a 的取值范围为 $(-\infty - \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} + \infty)$.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题；已知定义域求参数的取值范围；求复合函数的值域

🕒 图像辨析

2. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第7题4分 ★

已知 $0 < a < 1$, 函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a(-x)$ 的图象可能是 ().



【答案】D

【解析】 $\because 0 < a < 1$,

$\therefore$ 排除 A、B 选项,

$\therefore y = \log_a x$ 在 $(0, \infty)$ 为单调递减函数,

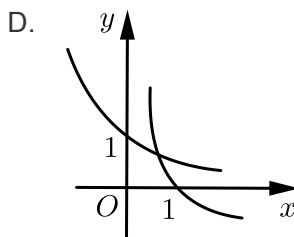
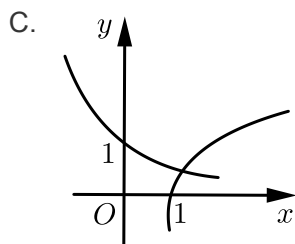
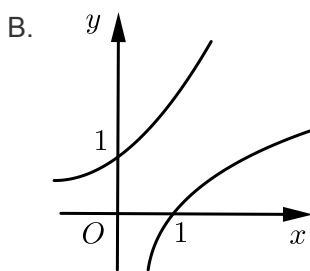
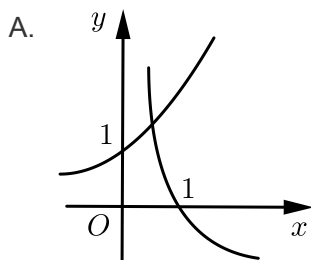
$\therefore y = \log_a(-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增.

故选 D.

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质; 对数函数的图象及性质; 函数图象的识别问题

3. 2020~2021 学年天津东丽区高一上学期期末第6题5分 ★

当 $a > 1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图象为 ().



【答案】C

【解析】当 $a > 1$ 时, 根据函数 $y = a^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 故排除 A、B;

而 $y = \log_a x$ 的在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 故排除 D,

故选 C.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

🧠 判断函数的单调性、奇偶性求解不等式

4. 2020~2021 学年天津高一上学期期末 (部分区) 第20题12分 ★★★★★

已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{m-1}{2^x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求 m 的值.

(2) 根据函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 若对 $\forall x \in [-1, 1]$, 不等式 $f(3x^2 + 1) + f(kx - x^2) \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) 2.

(2) 证明见解析.

(3) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

【解析】(1) 因为 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{即: } 2^{-x} - \frac{m-1}{2^{-x}} = -\left(2^x - \frac{m-1}{2^x}\right),$$

$$\text{整理得: } -(m-1)2^x + \frac{1}{2^x} = -2^x + \frac{m-1}{2^x},$$

解得, $m = 2$.

(2) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \left(2^{x_1} - \frac{1}{2^{x_1}}\right) - \left(2^{x_2} - \frac{1}{2^{x_2}}\right)$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) - \left(\frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}}\right)$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}}\right),$$

由 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 得 $2^{x_1} > 0, 2^{x_2} > 0$,

所以 $1 + \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} > 0$,

又由 $x_1 < x_2$, 得 $2^{x_1} < 2^{x_2}$,

所以, $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$.

于是 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 由 $f(3x^2 + 1) + f(kx - x^2) \geq 0$ 得,

$$f(3x^2 + 1) \geq f(x^2 - kx),$$

由(2)可知, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

所以, 对任意 $x \in [-1, 1]$, 不等式 $f(3x^2 + 1) \geq f(x^2 - kx)$ 恒成立,

等价于 $2x^2 + kx + 1 \geq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立,

设 $g(x) = 2x^2 + kx + 1, x \in [-1, 1]$, 即: $g(x)_{\min} \geq 0$,

$g(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{k}{4}$.

① 当 $-\frac{k}{4} \leq -1$ 时, 即 $k \geq 4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g(-1) = 3 - k \geq 0$, 无解;

② 当 $-1 < -\frac{k}{4} < 1$ 时, 即 $-4 < k < 4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g\left(-\frac{k}{4}\right) = 1 - \frac{k^2}{8} \geq 0$,

得, $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$;

③ 当 $-\frac{k}{4} \geq 1$ 时, 即 $k \leq -4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g(1) = 3 + k \geq 0$, 无解.

综上, 实数 k 的取值范围是 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

【标注】【知识点】用定义法证明函数的单调性; 利用函数奇偶性求函数解析式; 二次函数相关的恒成立问题

 值域型问题

5. 2016~2017学年天津高一上学期期中第8题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x > 0 \\ x^2 + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, 0]$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 x_1 的最小值为 () .

- A. $\log_2 3$ B. $\log_3 2$ C. 1 D. 2

【答案】 B

【解析】 $x \leq 0$, $f(x) \geq 1$

$\therefore$ 存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, 0]$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$,

$\therefore 3^{x_1} - 1 \geq 1$,

$\therefore 3^{x_1} \geq 2$,

$\therefore x_1 \geq \log_3 2$,

$\therefore x_1$ 的最小值为 $\log_3 2$.

故选 B .

【标注】 【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】 分段函数；等式的能成立或恒成立问题

 恒成立问题

6. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第20题10分 ★★★

已知函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数 , 其中 a 与 b 是常数 .

(1) 求 a 与 b 的值 .

(2) 若 $x \in [-1, 1]$, 对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x) < 2t^2 - \lambda t + 1$ 恒成立 , 求实数 λ 的取值范围 .

【答案】 (1) $a = 2$, $b = 1$.

(2) λ 的取值范围是 $\left\{ \lambda \mid -\frac{2\sqrt{15}}{3} < \lambda < \frac{2\sqrt{15}}{3} \right\}$.

【解析】 (1) $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , $\therefore \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-1) = -f(1) \end{cases}$,

即 $\begin{cases} \frac{-1+b}{2+a} = 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}+b}{1+a} = -\frac{-2+b}{4+a} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, 此时 $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + 2}$, 经检验可得

$f(-x) = -f(x)$,

故 $a = 2$, $b = 1$.

(2) $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{x+1} + 1}$, 可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数 , 又 $x \in [-1, 1]$, $\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(-1) = \frac{1}{6}$.

$\therefore$ 对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x) < 2t^2 - \lambda t + 1$ 恒成立,
 $\therefore 2t^2 - \lambda t + 1 > \frac{1}{6}$, 即 $2t^2 - \lambda t + \frac{5}{6} > 0$, 则有 $\Delta < 0$, 即 $\lambda^2 - 4 \times 2 \times \frac{5}{6} < 0$, 解
 得 $-\frac{2\sqrt{15}}{3} < \lambda < \frac{2\sqrt{15}}{3}$.
 所以实数 λ 的取值范围是 $\left\{ \lambda \mid -\frac{2\sqrt{15}}{3} < \lambda < \frac{2\sqrt{15}}{3} \right\}$.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求函数解析式；二次函数相关的恒成立问题

7. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第17题12分 ★★★

定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数 $y = f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

- (1) 求 $f(0)$ 的值.
- (2) 求证 $f(x)$ 为奇函数.
- (3) 若 $f(k \cdot 2^x) + f(4^{x+1} - 8^x - 2^x) > 0$ 对任意 $x \in [-1, 2]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) 0.

(2) 证明见解析.

(3) $k > -\frac{3}{4}$.

【解析】 (1) 在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中,

令 $x = y = 0$,

得 $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$,

则 $f(0) = 0$.

(2) 令 $y = -x$,

得 $f(x-x) = f(x) + f(-x)$,

即 $f(0) = f(x) + f(-x) = 0$,

即证得 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且是奇函数,

$\therefore f(k \cdot 2^x) > -f(4^{x+1} - 8^x - 2^x)$

$= f(-4^{x+1} + 8^x + 2^x)$,

$\therefore k \cdot 2^x > -4^{x+1} + 8^x + 2^x$,

$\therefore k > -2^{x+2} + 4^x + 1$

$= 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$

$= (2^x - 2)^2 - 3$,

令 $g(x) = (2^x - 2)^2 - 3$, 且 $x \in [-1, 2]$,

则 $g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的最大值为 $g(-1) = -\frac{3}{4}$,

$\therefore k > -\frac{3}{4}$.

8. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第19题14分 ★★★

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ ，其中 e 是自然对数的底数。

(1) 用定义证明： $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

(2) 证明： $f(x)$ 的奇偶性，并求最小值 m 。

(3) 在(2)的条件下，若 $f(2x^2 + a^2) - f(2x^2 - 2ax + a^2 + 2) < m - 2$ 在 $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时恒成立，求实数 x 的取值范围。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。 $m = 2$ 。

(3) $x \in (-2, 2)$ 。

【解析】(1) 任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}} - \left(e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}}\right) \\ &= \frac{(e^{x_1} - e^{x_2})(e^{x_1+x_2} - 1)}{e^{x_1}e^{x_2}} \end{aligned}$$

$$\because e^{x_1} - e^{x_2} < 0, e^{x_1}e^{x_2} - 1 > 0,$$

$$\text{故 } f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

即函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数。

$$(2) \because f(-x) = e^{-x} + \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{e^x} + e^x = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数，

又 $\because f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，

$$\therefore f_{\min}(x) = f(0) = 2.$$

故 $m = 2$ 。

(3) 由(2)知 $m = 2$ ，

$$\therefore f(2x^2 + a^2) - f(2x^2 - 2ax + a^2 + 2) < m - 2,$$

$$\text{即 } f(2x^2 + a^2) - f(2x^2 - 2ax + a^2 + 2) < 0,$$

$$\therefore f(2x^2 + a^2) < f(2x^2 - 2ax + a^2 + 2),$$

$$\text{设 } y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 2,$$

$$\Delta = 4a^2 - 8a^2 - 16 = -4a^2 - 16 < 0,$$

$$\text{故 } 2x^2 - 2ax + a^2 + 2 > 0,$$

$$\text{又 } \because 2x^2 + a^2 > 0,$$

$$\therefore f(2x^2 + a^2) - f(2x^2 - 2ax + a^2 + 2) < 0,$$

在 $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时恒成立可化为，

$2x^2 + a^2 < 2x^2 - 2ax + a^2 + 2$ 在 $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时恒成立,

即 $2 - 2ax > 0$ 在 $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时恒成立,

故 $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases}$,

解 $-2 < x < 2$.

故 x 的取值范围为 $x \in (-2, 2)$.

【标注】【知识点】函数的值域；利用定义判断函数奇偶性；用定义法证明函数的单调性；利用函数单调性解不等式；利用单调性求函数最值

能成立问题

9. 2020~2021学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第15题13分 ★★★

函数 $f(x) = \log_2(2^x - 1)$.

(1) 解不等式 $f(x) < 1$.

(2) 若方程 $f(x) = \log_4(m - 4^x)$ 有实数解, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\{x | 0 < x < \log_2 3\}$

(2) $m > 1$

【解析】 (1) 解: 不等式 $f(x) < 1$ 即 $\log_2(2^x - 1) < 1$;

$\therefore 0 < 2^x - 1 < 2$, 即 $1 < 2^x < 3$,

$\therefore 0 < x < \log_2 3$,

故不等式 $f(x) < 1$ 的解集为 $\{x | 0 < x < \log_2 3\}$.

(2) 解: 方程 $f(x) = \log_4(m - 4^x)$ 有实数解, 即 $\log_2(2^x - 1) = \log_4(m - 4^x)$ 有解;

$\therefore 2^x - 1 > 0$, 所以 $x > 0$, 且 $m - 4^x > 0$;

所以 $(2^x - 1)^2 = m - 4^x$ 在 $x > 0$ 上有解;

即 $m = -2 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x + 1$ 在 $x > 0$ 上有解;

设 $2^x = t (t > 1)$ 即 $m = 2t^2 - 2t + 1$ 在 $t > 1$ 上有解;

当 $t > 1$ 时, $m = 2t^2 - 2t + 1 > 1$;

故实数 m 的取值范围为: $m > 1$.

【标注】【知识点】对数方程和对数不等式

一元二次不等式解集问题

10. 2018~2019学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期月考第20题10分 ★★★

若关于 x 的不等式 $\frac{k^2 x}{x^2 + 3k^2} > m$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ ，求不等式 $5mx^2 + \frac{k^2}{2}x + 3 > 0$ 的解集。

【答案】 (1) $x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 。

【解析】 (1) 由题意得：

$$\begin{cases} \frac{-3k^2}{9+3k^2} = m \\ \frac{-2k^2}{4+3k^2} = m \end{cases},$$

$$\text{解得 } k^2 = 2, m = -\frac{2}{5},$$

$$\therefore 5mx^2 + \frac{k^2}{2}x + 3 > 0 \text{ 即 } -2x^2 + x + 3 > 0,$$

$$\text{解得 } x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)。$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件；不等式中的恒成立与能成立问题

11.

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期单元测试《集合、不等式、均值不等式》第25题

★★★

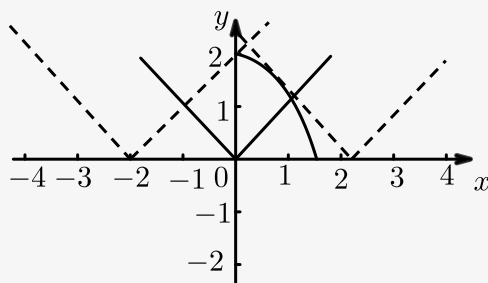
若关于 x 的不等式 $x^2 + |x - a| < 2$ ，至少有一个正数解，则实数 a 的取值范围是 ()。

- A. $\left(-\frac{9}{4}, 2\right)$ B. $\left(-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ C. $\left(-2, \frac{9}{4}\right)$ D. $(-2, 2)$

【答案】 C

【解析】 原不等式变形为： $|x - a| < 2 - x^2$ 且 $0 < 2 - x^2$ ，

在同一坐标系画出 $y = 2 - x^2$ ($y > 0, x > 0$) 和 $y = |x|$ 两个图象，



将绝对值函数 $y = |x|$ 向左移动当右支经过 $(0, 2)$ 点， $a = -2$ ，

将绝对值函数 $y = |x|$ 向右移动让左支与抛物线相切 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ 点， $a = \frac{9}{4}$ ，

故实数 a 的取值范围是 $\left(-2, \frac{9}{4}\right)$ ，

故选 C .

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）