

04零点问题

1. 函数零点的判定

1. 零点存在性定理

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有

那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点

即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

【备注】【答案】 $f(a) \cdot f(b) < 0$

2. 数形结合研究函数零点

【耐心阅读以下一段话】

函数 $f(x) = h(x) - g(x)$ 的零点就是函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 图象 **交点的横坐标**，所以与函数零点相关的问题，可以先画出函数图象，根据函数的图象并结合函数的零点存在性定理，列出相关的相等关系或不等关系，进而解决零点所在的区间及参数的范围等问题。

【恭喜你完成自学成就！智商 + 1 + 1 + 1...】

3. 二分法

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$ ，通过不断把 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做 **二分法**。

【步骤】

(1) 确定区间 $[a, b]$ ，验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，给定精确度 ε ；

(2) 求区间 $[a, b]$ 的中点 c ；

(3) 计算 $f(c)$ ；

①若 $f(c) = 0$ ，则 c 就是函数的零点。

②若 $f(a) \cdot f(c) < 0$ ，则令 $b = c$ （此时零点 $x_0 \in (a, c)$ ）；

③若 $f(c) \cdot f(b) < 0$ ，则令 $a = c$ （此时零点 $x_0 \in (c, b)$ ）。

(4) 判断是否达到精确度 ε ：即若 $|a - b| < \varepsilon$ ，则得到零点近似值 a （或 b ），否则重复步骤（2）（3）（4）。

2. 零点具体题型

🔍 零点存在区间

1. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第7题4分 ★

使函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 有零点的区间是 () .

A. $(-3, -2)$

B. $(-2, -1)$

C. $(-1, 0)$

D. $(0, 1)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = -\frac{1}{2}$,

$$f(0) = 2^0 - 0 = 1 ,$$

$$\therefore f(-1) \cdot f(0) = -\frac{1}{2} < 0 .$$

故选 C .

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）；函数零点存在定理

2. 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第4题4分 ★★

设函数 $y = x^3$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在的区间是 () .

A. $(0, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 3)$

D. $(3, 4)$

【答案】 B

【解析】 令 $f(x) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$,

$y = x^3$ 为增函数 , $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 为减函数 ,

增函数减去减函数得到还是增函数 ,

$\therefore f(x) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 ;

$$\text{又 } f(1) = 1 - 2 = -1 < 0 ,$$

$$f(2) = 8 - 1 = 7 > 0 ,$$

$\therefore f(x) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的零点在 $(1, 2)$ 内 ,

$\therefore$ 函数 $y = x^3$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象交点为 (x_0, y_0) ,

$\therefore x_0$ 所在的区间是 $(1, 2)$.

故选 B .

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）；函数零点存在定理

3. 2020~2021学年天津南开区高一上学期期末第14题3分 ★★

已知函数 $f(x) = 3^x + x - 5$ 的零点 $x_0 \in [a, b]$, 且 $b - a = 1$, $a, b \in \mathbf{N}^*$, 则 $a + b =$ _____ .

【答案】 3

【解析】 $\because y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$y = x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$\therefore f(x) = 3^x + x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$$f(1) = 3^1 + 1 - 5 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 3^2 + 2 - 5 = 6 > 0,$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) < 0,$$

$$\therefore \text{零点 } x_0 \in [1, 2],$$

$$\therefore a = 1, b = 2,$$

$$\therefore a + b = 3.$$

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）

4. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第2题4分 ★★

函数 $f(x) = \log_2 x - \frac{3}{x}$ 的零点所在区间为（ ）.

A. (1, 2)

B. (2, 3)

C. (3, 4)

D. (4, 5)

【答案】B

【解析】由函数的解析式可得，

$$f(2) = \log_2 2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$f(3) = \log_2 3 - \frac{3}{3} = \log_2 3 - 1 > 0,$$

$$\therefore f(2) \cdot f(3) < 0,$$

根据函数的零点判定定理可得，

函数零点所在的区间为 (2, 3) .

故选 B .

【标注】【知识点】函数零点存在定理；判定函数零点所在区间（存在性定理）

5. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第2题5分 ★★

函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是()

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

【答案】B

【解析】由于函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

$$f(1) = \ln 2 - 2 < 0, f(2) = \ln 3 - 1 > 0,$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) < 0,$$

故函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x} (x > 0)$ 的零点所在的大致区间是 $(1, 2)$.

故选 B .

【标注】【知识点】函数零点存在定理；判定函数零点所在区间（存在性定理）；利用四则运算判断函数单调性

6. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第6题4分 ★★

在下列区间中，方程 $e^x + 4x - 3 = 0$ 的解所在的区间为（ ）.

- A. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because y = e^x$ 为增函数，

$y = 4x$ 为增函数，

$\therefore y = e^x + 4x - 3$ 为增函数，

设 $f(x) = e^x + 4x - 3$ ，

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + 1 - 3 = e^{\frac{1}{4}} - 2 < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + 4 \times \frac{1}{2} - 3 = e^{\frac{1}{2}} - 1 > 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$\therefore \text{零点所在区间为 } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

故 B .

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）

7. 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第9题4分 ★★

函数 $f(x) = x - \lg \frac{1}{x} - 2$ 的零点所在区间为（ ）.

- A. $(0, 1)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(2, 3)$ D. $(1, 2)$

【答案】 D

【解析】 $f(x) = x - \lg \frac{1}{x} - 2$

$$= x + \lg x - 2,$$

$\because f(x) = x + \lg x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增，

$$f(1) = -1 < 0,$$

$$f(2) = \lg 2 > 0,$$

$\therefore$ 零点区间为 $(1, 2)$.

故选 D .

【标注】【知识点】判定函数零点所在区间（存在性定理）

8. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第4题 ★★

函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$ 的零点所在区间为 () .

A. $(-4, -3)$

B. $(-3, -e)$

C. $(-e, -2)$

D. $(-2, -1)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$,

根据复合函数单调性可知单调减 ,

$$f(-3) = \ln 3 - 1 > 0 ,$$

$$f(-e) = \frac{e}{3} - 1 < 0 ,$$

$$\therefore f(-3) \cdot f(-e) < 0 ,$$

由零点存在定理得 , 零点在 $(-3, -e)$.

故选 : B .

【标注】【知识点】函数零点存在定理

9. 2015~2016学年天津蓟县高三上学期期中理科第2题5分 ★★

函数 $f(x) = |x - 2| - \ln x$ 在定义域内零点可能落在下列哪个区间内 () .

A. $(0, 1)$

B. $(2, 3)$

C. $(3, 4)$

D. $(4, 5)$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = |x - 2| - \ln x$,

$$f(1) = 1 > 0 ,$$

$$f(2) = -\ln 2 < 0 ,$$

$$f(3) = 1 - \ln 3 < 0 ,$$

$$f(4) = 2 - \ln 4 > 0 ,$$

$$f(5) = 3 - \ln 5 > 0 ,$$

$$\therefore f(1)f(2) < 0 , f(3)f(4) < 0 ,$$

$\therefore$ 函数的零点在 $(1, 2)$, $(3, 4)$ 上 .

故选 C .

【标注】【知识点】函数零点存在定理

10. 2018~2019学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末（六校联考）第2题4分 ★★

函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - e^{\ln 4}$ 在区间 $(k, k+1) (k \in \mathbf{N})$ 内有零点，则 $k = (\quad)$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - e^{\ln 4}$ 是连续函数，

$$\text{由 } f(2) = 2^2 - \frac{1}{2} - e^{\ln 4}$$

$$= 4 - \frac{1}{2} - 4$$

$$= -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(3) = 3^2 - \frac{1}{3} - e^{\ln 4}$$

$$= 9 - \frac{1}{3} - 4 = \frac{14}{3} > 0$$

由零点定理知， $f(x)$ 的零点在区间 $(2, 3)$ 上，

$\therefore$ 零点所在的一个区间 $(k, k+1) (k \in \mathbf{Z})$ 是 $(2, 3)$ ，

$\therefore k = 2$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 判定函数零点所在区间（存在性定理）；函数零点的概念；函数零点存在定理

11. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期末第8题3分 ★★

设方程 $x^3 = 2^{2-x}$ 的解为 x_0 ，则 x_0 所在的区间是 $(\quad)$.

A. $(0, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 3)$

D. $(3, 4)$

【答案】 B

【解析】 令 $f(x) = x^3 - 2^{2-x}$ ，

$$\text{则 } f(1) = 1 - 2 = -1 < 0, \quad f(2) = 2^3 - 2^{2-2} = 8 - 1 = 7 > 0,$$

$$\therefore f(1)f(2) < 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有零点，

$\therefore$ 方程 $x^3 = 2^{2-x}$ 的解为 x_0 ，则 x_0 所在的区间是 $(1, 2)$.

故选：B .

【标注】 【知识点】 判定函数零点所在区间（存在性定理）；函数零点存在定理

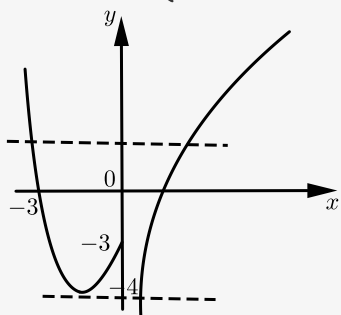
 根据解的个数求解参数值

12. 2020~2021学年天津东丽区高一上学期期末第15题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0 \\ -2 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ ，方程 $f(x) = k$ 有两个实数解，则 k 的范围是 _____。

【答案】 $\{k \mid k = -4 \text{ 或 } k > -3\}$

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0 \\ -2 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图，



作出直线 $y = k$ ，观察图象， $k = -4$ 或 $k > -3$ 时，

直线与曲线有两个交点，

故实数 k 的取值范围是 $\{k \mid k = -4 \text{ 或 } k > -3\}$ 。

故答案为： $\{k \mid k = -4 \text{ 或 } k > -3\}$ 。

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；分段函数

13. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第7题4分 ★★

已知函数 $f(x) = |3^x - 2| - m$ 有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是 ()。

- A. $[0, 2]$ B. $(0, 2)$ C. $[0, 2)$ D. $(0, 2]$

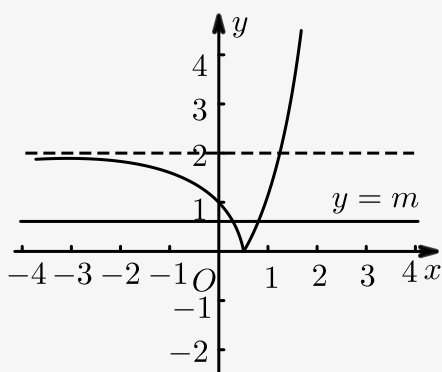
【答案】 B

【解析】 令 $f(x) = 0$ ，可得 $|3^x - 2| = m$ ，

由函数 $f(x) = |3^x - 2| - m$ 有两个不同的零点，

可得函数 $y = |3^x - 2|$ 与 $y = m$ 的图象有两个公共点，

作出函数 $y = |3^x - 2|$ 与 $y = m$ 的图象，如图所示，



由图可得： $0 < m < 2$ ，

∴实数 m 的取值范围是 $(0, 2)$.

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

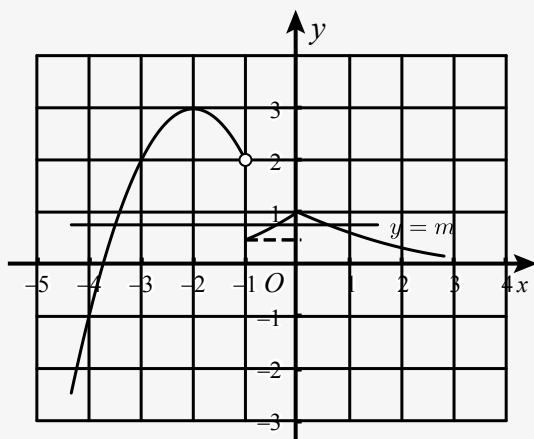
14. 2020~2021学年天津高一上学期期末（部分区）第10题4分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 1, & x < -1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \geq -1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有三个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $(0, 3)$ B. $[2, 3)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

【答案】 D

【解析】 关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有三个不同的实根, 等价于函数 $f(x)$ 与函数 $y = m$ 的图象有三个不同的交点, 作出函数的图象如下:



由图可知实数 k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

故选 D .

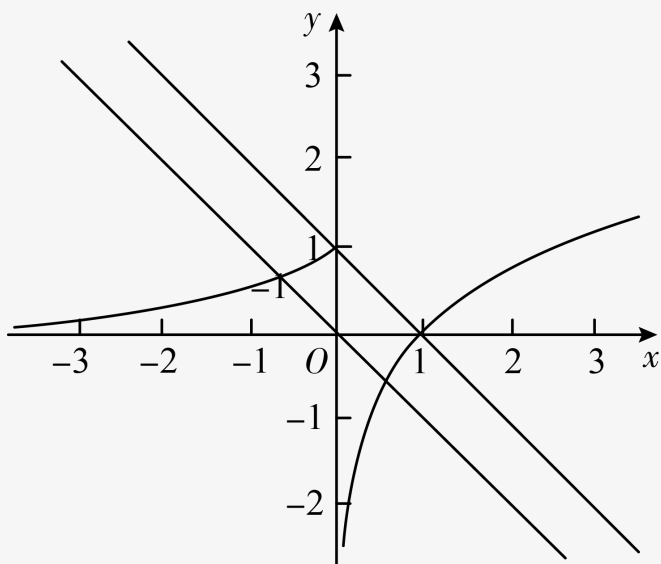
【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

15. 2019年天津红桥区高三一模文科 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$, 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则实数 a 取值范围是 ____ .

【答案】 $[-1, +\infty)$

【解析】 解: 由 $g(x) = 0$ 得 $f(x) = -x - a$,
作出函数 $f(x)$ 和 $y = -x - a$ 的图象如图:



当直线 $y = -x - a$ 的截距 $-a \leq 1$,
 即 $a \geq -1$ 时, 两个函数的图象有 2 个交点 ,
 即函数 $g(x)$ 存在 2 个零点 ,
 故实数 a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$,
 故答案为 : $[-1, +\infty)$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

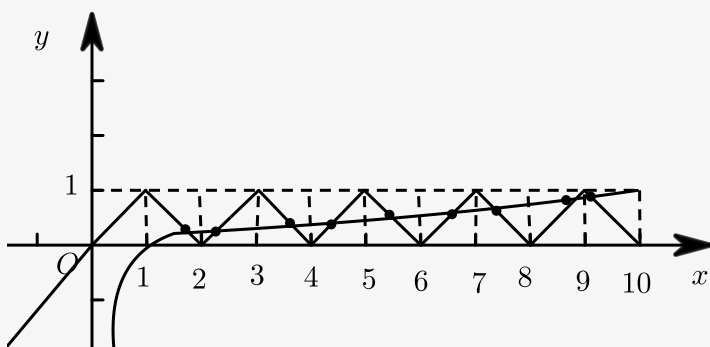
16. 2020~2021 学年 12 月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第 8 题 3 分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & x \leq 2 \\ f(x - 2), & x > 2 \end{cases}$, 则函数 $y = f(x) - \lg x$ 的零点的个数是 () .

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【答案】 C

【解析】 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 2 - x$,
 当 $x < 1$ 时, $f(x) = x$,
 当 $x > 2$ 时, $f(x) = f(x - 2)$,
 即 $f(x)$ 是周期为 2 的函数 ,
 $\therefore f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上重复的点是 $(0, 2)$ 上的图像 .
 根据题意, 可作出函数图象, 可得出共有 9 个交点 .



故选 C .

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

17. 2020~2021学年天津市津南区天津市咸水沽一中高一上学期期末第9题5分 ★★★

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$, 且当 $x \in [-1, 1]$ 时 ,

$f(x) = \begin{cases} \log_{0.5}(1-x), & -1 \leq x \leq 0 \\ -|x|, & 0 < x < 1 \end{cases}$, 若在区间 $[0, 5]$ 上函数 $g(x) = f(x) - mx$ 恰有 4 个不同的零点 , 则

实数 m 的取值范围为 () .

- A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$

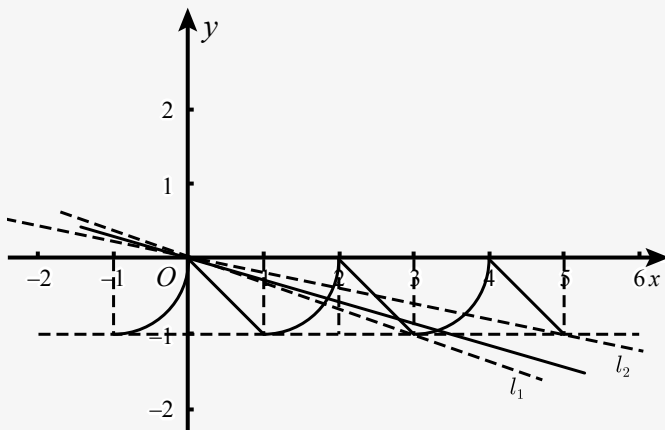
【答案】D

【解析】由 $f(x-1) = f(x+1)$ 可得 $f(x) = f(x+2)$,

故 $f(x)$ 是周期为 2 的函数 ,

由题在 $[-1, 1]$ 上有 $f(x) = \begin{cases} \log_{0.5}(1-x), & -1 \leq x \leq 0 \\ -|x|, & 0 < x < 1 \end{cases}$,

于是可以绘制 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 5]$ 图象 , 如图 :



由于 $g(x) = f(x) - mx$ 在 $[0, 5]$ 有 4 个不同零点 ,

得函数 $h(x) = mx$ 与 $f(x)$ 在 $[0, 5]$ 有 4 个不同交点 ,

且由 $f(x)$ 和 $h(x)$ 表达式可知 , 其中一个交点必为 $O(0, 0)$,

由图可知 , $h(x)$ 必在 l_1 与 l_2 之间才可符合题目要求 , 且不与 l_1 、 l_2 重合 ,

l_1 过 $O(0, 0)$ 和 $(3, -1)$, 故其方程为 $y = -\frac{1}{3}x$,

l_2 过 $O(0, 0)$ 和 $(5, -1)$, 故其方程为 $y = -\frac{1}{5}x$,

由于 $h(x) = mx$ 在 l_1 与 l_2 之间且不与 l_1 、 l_2 重合 ,

故其斜率 m 满足 $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{5}$.

故选 D .

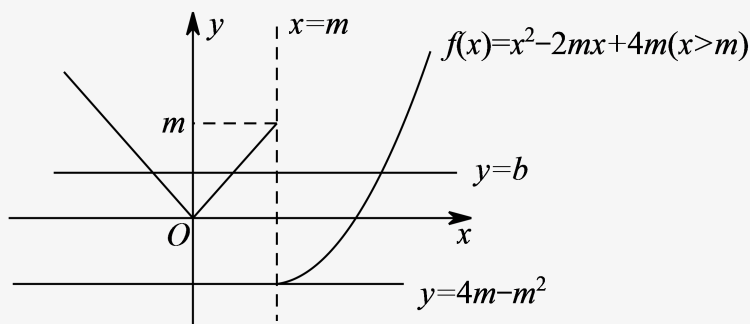
【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；分段函数；函数周期性判断

18. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第14题4分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m & x > m \end{cases}$ 其中 $m > 0$ ，若存在实数 b ，使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是 _____。

【答案】 $(3, +\infty)$

【解析】 当 $m > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, x > m \end{cases}$ 的图象如图：



$\because x > m$ 时， $f(x) = x^2 - 2mx + 4m = (x - m)^2 + 4m - m^2 > 4m - m^2$ ，

$\therefore y$ 要使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根，则：

$4m - m^2 < m (m > 0)$ ，即 $m^2 > 3m (m > 0)$ ，解得， $m > 3$ 。

故 m 的取值范围是 $(3, +\infty)$ 。

【标注】 【知识点】 函数零点的概念

🔴 零点个数

19. 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第10题4分 ★★

方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = |\ln x|$ 的解的个数为 ()。

A. 1

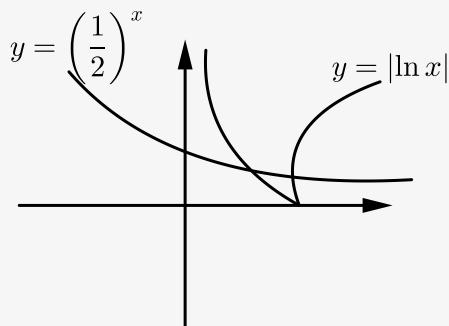
B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 画出 $y = |\ln x|$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，



由图知，2个交点。

故选 B .

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

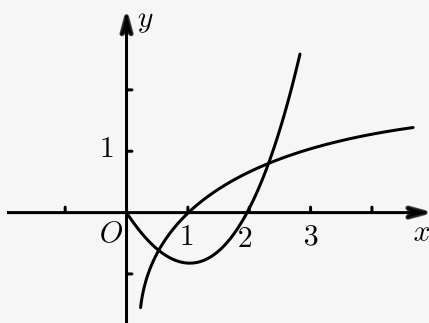
20. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第14题4分 ★★★

函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2|-1, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点的个数是 _____ .

【答案】 4

【解析】 $x \leq 0$ 时, $|x+2|-1=0$, $x=-1$ 或 $x=-3$,
 $x > 0$ 时, $\ln x - x^2 + 2x = 0$, 即 $\ln x = x^2 - 2x$.

如图:



有 2 个交点, 则有 2 个零点,

$\therefore$ 综上, 共有 4 个零点.

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念



求零点的和积范围

21. 2020~2021学年天津滨海新区高一上学期期末第20题5分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2, & x \leq 0 \\ |\log_{\frac{1}{2}} x|, & x > 0 \end{cases}$. 若方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 ,

且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则实数 a 的最小值是 _____ ; $\frac{4}{x_3 \cdot x_4^2} - x_4 \cdot (x_1 + x_2)$ 的最小值是 _____ .

【答案】 2 ; 9

【解析】 $f(x)$ 是分段函数, 对于 $x \leq 0$, $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ 是开口向下的二次函数, 最多有 2 个解,

对于 $x > 0$, $|\log_{\frac{1}{2}} x|$ 也最多只有两个解, 故在 $x \leq 0$, $x > 0$ 范围各有两个解.

$x \leq 0$ 时, $f(x)$ 关于 $x = -1$ 对称, 在 $(-\infty, -1)$ 上, $f(x)$ 单调递增, $f(x)_{\max} = f(-1) = 3$

在 $(-1, 0)$ 上, $f(x)$ 单调递减, 为使得 $f(x) = a$ 在 $x \leq 0$ 上有两个解, 应使 $f(0) \leq a < f(1)$

即 $2 \leq a < 3$, 对于 $x > 0$, $|\log_{\frac{1}{2}} x| \geq 0$, 对于任意 $a > 0$, 都有两个根,

$\therefore a$ 的最小值为 $a = 2$;

x_1, x_2 关于对称轴 $x = -1$ 对称, $\therefore x_1 + x_2 = 2 \times (-1) = -2$,

$|\log_{\frac{1}{2}} x_3| = |\log_{\frac{1}{2}} x_4| = a$,

$\therefore x_3 < x_4$, $\log_{\frac{1}{2}} x$ 是减函数, $a > 0$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} x_3 = a$, $\log_{\frac{1}{2}} x_4 = -a$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} x_3 + \log_{\frac{1}{2}} x_4 = 0$, $\log_{\frac{1}{2}} x_3 x_4 = 0$,

$\therefore x_3 x_4 = 1$,

$\therefore$ 原式可化为 $\frac{4}{1 \times x_4} - x_4(-2) = \frac{4}{x_4} + 2x_4$,

$\therefore a \in [2, 3)$, $\therefore \log_{\frac{1}{2}} x_4 \in [-3, -2]$, $\therefore x_4 \in [4, 8)$,

$\frac{4}{x} + 2x$ 在 $[4, 8)$ 上是增函数,

所以原式的最小值为 $x_4 = 4$ 时的取值即 $\frac{4}{4} + 2 \times 4 = 9$.

【标注】【知识点】求零点或积的范围; 已知零点情况求参数的取值范围

22. 2020~2021学年天津高一上学期期末(六校联考)第9题4分 ★★★

设函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ -x + 7, & x > 2 \end{cases}$, 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则

$2^a + 2^b + 2^c$ 的取值范围是 ().

A. (8, 9)

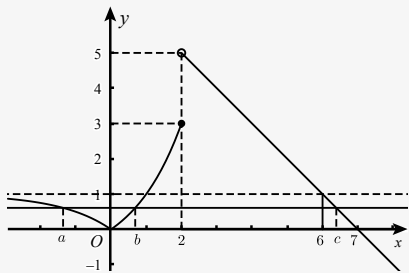
B. (65, 129)

C. (64, 128)

D. (66, 130)

【答案】 D

【解析】



由图可知: $f(a) = f(b) = f(c)$, 设 $a < b < c$,

$1 - 2^a = 2^b - 1$, $2^a + 2^b = 2$,

$y = 1$ 时, $-x + 7 = 1$, $x = 6$, $0 < f(a) = f(b) = f(c) < 1$,

$\therefore 6 < c < 7$,

$\therefore 2^6 < 2^c < 2^7$,

$\therefore 64 < 2^c < 128$,

$\therefore 66 < 2^a + 2^b + 2^c < 130$,

选D.

【标注】【知识点】分段函数；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

零点问题解答

23. 2020~2021学年天津高一上学期期末（六校联考）第19题14分 ★★★

已知函数 $f(x) = \ln(x+a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $(1, 0)$, $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若函数 $y = f(x) + \ln(2x-k)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点, 求整数 k 的值.

(3) 设 $m > 0$, 若对于任意 $x \in \left[\frac{1}{m}, m\right]$, 都有 $g(x) < -\ln(m-1)$, 求 m 的取值范围.

【答案】(1) $f(x) = \ln x$.

(2) 2或3.

(3) $(1, 2)$.

【解析】(1) 将 $(1, 0)$ 代入 $y = \ln(x+a)$, 得 $0 = \ln(1+a)$,

解得 $a = 0$,

$\therefore f(x) = \ln x$.

(2) $y = f(x) + \ln(2x-k)$

$= \ln x + \ln(2x-k)$

$= \ln x(2x-k)$

$= \ln(2x^2 - kx)$,

令 $\ln(2x^2 - kx) = 0$,

$\therefore 2x^2 - kx = 1$,

设 $h(x) = 2x^2 - kx - 1$,

$y = h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点,

$\therefore h(1) \cdot h(2) < 0$

$h(1) = 1 - k$, $h(2) = 7 - 2k$,

$(1-k)(7-2k) < 0$, $1 < k < \frac{7}{2}$,

$\therefore k$ 的值为 2或3.

(3) $\because m > 0$ 且 $m > \frac{1}{m}$,

$\therefore m > 1$, 且 $0 < \frac{1}{m} < 1$,

$g(x) = x^2 - 2e^{f(x)} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$,

$\therefore g(x)$ 最大值可能是 $g(m)$ 或 $g\left(\frac{1}{m}\right)$.

$\therefore g(m) - g\left(\frac{1}{m}\right) = m^2 - 2m - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right)$

$$\begin{aligned}
&= m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right) \\
&= \left(m - \frac{1}{m}\right) \left(m + \frac{1}{m} - 2\right) \\
&= \left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m} \\
&= \left(m - \frac{1}{m}\right) \frac{(m-1)^2}{m} > 0, \\
\therefore g(x)_{\max} &= g(m) = m^2 - 2m, \\
\therefore \text{任意 } x \in \left[\frac{1}{m}, m\right], & g(x) < -\ln(m-1), \\
\therefore g(x)_{\max} &= m^2 - 2m < -\ln(m-1), \\
\text{即 } m^2 - 2m + \ln(m-1) &< 0, \\
\text{设 } h(m) &= m(m-2) + \ln(m-1) \quad (m > 1), \\
h(m) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上为增函数, 且 } h(2) &= 0, \\
\therefore h(m) &= m(m-2) + \ln(m-1) < 0 = h(2), \\
\text{即 } h(m) &< h(2), \\
\therefore 1 < m < 2, \\
\text{即 } m \text{ 的取值范围是 } (1, 2).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；对数函数的图象及性质；定轴动区间求值域

24. 2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第20题 ★★★

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2 [(a-3)x + 3a-4]$.

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(3x) < 0$.

(2) 若函数 $y = f(x^2 - 4x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

(3) 设 $g(x) = f(x) - \log_2 \left(\frac{1}{x} + 2a\right)$, 若函数 $y = g(x)$ 有且只有一个零点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$.

(2) 实数 a 的取值范围为 $[8, +\infty)$.

(3) a 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{2, 3\}$.

【解析】 (1) 当 $a=2$ 时, $f(3x) = \log_2 [(a-3) \cdot 3x + 3a-4] = \log_2 (-3x+2)$,

$\therefore \log_2 (-3x+2) < 0$, 即 $0 < -3x+2 < 1$,

解得: $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$.

(2) 函数 $f(x^2 - 4x) = \log_2 [(a-3)(x^2 - 4x) + (3a-4)]$,

设函数 $y = (a-3)(x^2 - 4x) + (3a-4)$ 的值域为 M , 则 $(0, +\infty) \subseteq M$,

当 $a-3=0$, 即 $a=3$ 时, 不满足题意,

当 $a-3 \neq 0$, 即 $a \neq 3$ 时, $\begin{cases} a-3 > 0 \\ \Delta = 16(a-3)^2 - 4(a-3) \cdot (3a-4) \geq 0 \end{cases}$

解得: $a \geq 8$,

综上实数 a 的取值范围为 $[8, +\infty)$.

$$(3) \quad g(x) = \log_2 [(a-3)x + (3a-4)] - \log_2 \left(\frac{1}{x} + 2a \right),$$

若函数 $y = g(x)$ 有且只有一个零点,

$$\text{故 } (a-3)x + (3a-4) = \frac{1}{x} + 2a,$$

$$\text{即 } (a-3)x^2 + (a-4)x - 1 = 0, (*)$$

当满足 $\frac{1}{x} + 2a > 0$ 时, 只有唯一解,

$$\text{方程 } (*) \text{ 化为 } [(a-3)x - 1](x+1) = 0,$$

①当 $a=3$ 时, 解得 $x=-1$, 此时 $\frac{1}{x} + 2a = 5 > 0$, 满足题意.

②当 $a=2$ 时, 两根均为 $x=-1$, 此时, $\frac{1}{x} + 2a = 3 > 0$, 也满足.

③当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 3$ 时, 两根为 $x_1 = \frac{1}{a-3}$, $x_2 = -1$,

$$\text{当 } x = \frac{1}{a-3} \text{ 时, } \frac{1}{x} + 2a = 3a-3,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \frac{1}{x} + 2a = 2a-1, \text{ 依题意 } (3a-3)(2a-1) < 0,$$

$$\text{解得: } \frac{1}{2} < a < 1,$$

综上, a 的取值范围 $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{2, 3\}$.

【标注】【知识点】解对数不等式; 求复合函数的值域; 函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围