

02辅助角公式

1. 辅助角公式

1. 辅助角公式的目的

对于形如 $y = a \sin x + b \cos x$ (a, b 是不同时为零的实数) 这样的表达式, 如何去研究它的值域、周期以及单调区间呢?

【备注】【教师补充】 由于之前我们学习过正弦型函数的相关性质, 一个自然的想法是, 若可以把它恒等变化为正弦型函数, 问题自然就解决了

2. 辅助角公式的推导

①考察以 (a, b) 为坐标的点 $P(a, b)$, 设以 OP 为终边的一个角是 φ , 则由三角函数的定义, 有:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

②于是:

$$y = a \sin x + b \cos x = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$\underline{\hspace{2cm}}$$
$$\underline{\hspace{2cm}}$$

③其中 φ 角所在象限由 a, b 的符号确定, φ 角的值由 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 共同确定, 即 φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定.

【备注】【答案】

$$\textcircled{1} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

②

$$\begin{aligned} y = a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \end{aligned}$$

【教师备注】

由上面的推导可见, 利用辅助角公式可以将同角的正弦和余弦的线性组合式 $a \sin x + b \cos x$ 转化成一个正弦型函数, 这样做有利于函数式的化简, 进而可以研究它的周期, 值域, 单调性等一系列性质.

1. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第17题2分 ★★

若 $3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = A \sin(\alpha + \varphi)$, 则 A , φ 的值分别为 () .

- A. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}$ B. $-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$ C. $2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}$ D. $2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 $3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$
 $= 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{2} \right)$
 $= 2\sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right)$
 $= 2\sqrt{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \alpha \right)$
 $= 2\sqrt{3} \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right)$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 辅助角公式；倍角、和差角公式综合

2. 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第14题4分 ★★

计算： $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】 $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$
 $= \frac{\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$
 $= \frac{\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$
 $= 2\sqrt{6}$.

故答案为： $2\sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】 二倍角的正弦；半角公式；辅助角公式；倍角、和差角公式综合

3.特别说明

辅助角公式在天津的考题中出现应用的形式比较单一，我们将在后面的习题中强化练习如何利用辅助角公式对三角函数进行化简，并根据化简后的结果巩固练习前面所学的单调性、奇偶性、对称性、值域、最值的相关题型。

【备注】 【教师备注】 通过后面的习题，引导学生练习使用辅助角公式及和差角、二倍角公式对三角函数式进行化简，此处不再过多放题。

2. 三角恒等变换公式化简函数后在性质中的具体应用

 求解在实数域上的单调性

【1:1型】

3. 2017~2018学年天津红桥区高一上学期期末第15题10分 ★★

已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 .

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间 .

【答案】 (1) π .

(2) $\left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8} \right], k \in \mathbf{Z}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1$

$$= \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) .$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi .$$

$$(2) f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) ,$$

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} ,$$

$$\text{得 : } k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 : } \left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8} \right], k \in \mathbf{Z} .$$

【标注】【知识点】求单调区间；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

4. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第19题 ★★★

$f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin^2 x$. 化简 $f(x)$

化简 $f(x)$

【答案】 (1) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} .$

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质

【1: $\sqrt{3}$ 型】

5. 2020~2021学年天津高一上学期期末(部分区)第19题12分 ★★

已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}$, $x \in \mathbf{R}$.

求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间.

【答案】(1) $f(x)$ 的最小正周期为 π .

$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

【解析】(1) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{3}(1 - \cos 2x) - \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \\ &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\text{由 } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{可得 } x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；二倍角的正弦；二倍角的余弦；辅助角公式；求正弦型函数的周期；求正弦型函数的单调区间

6. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高一上学期期末第17题 ★★★

已知函数 $f(x) = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

【答案】(1) $T = \pi$.

$$(2) \left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

【解析】(1) $f(x) = \sin x \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$,
 $= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$,
 $= \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$(2) 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore f(x)$ 单调减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；两角和与差的余弦

🔗 求解确定区间上的单调性

7. 2020~2021 学年天津河西区高一上学期期末第18题12分 ★★

已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

【备注】【教师备注】此题答案为**取交集办法**

【答案】(1) π .

(2) $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；
在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

【解析】(1) 因为 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$
$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}$$
$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$
所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 依题意, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

设 $A = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], B = \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$,

易知 $A \cap B = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$,

所以当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增;

在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间

8. 2020~2021 学年天津东丽区高一上学期期末第20题10分 ★★

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x + m, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 m 的值.

(2) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

【备注】

【教师备注】此题答案为**取交集办法**

【答案】(1) $m = -2$.

(2) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

【解析】(1) $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 + m$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + m + 1$$

$$= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + m + 1,$$

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $0 \leq 2x \leq \pi$,

$$\text{则 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6},$$

$\therefore$ 当 $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 2 + m + 1 = 1$, 解得 $m = -2$.

(2) 因为 $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1$,

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{设 } A = \left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{则 } A \cap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right],$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{3} \right], \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$.

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；求正弦型函数的单调区间

9. 2017~2018学年天津河北区高一上学期期末第19题12分 ★★★★★

已知函数 $f(x) = 4 \sin x \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上的单调性.

【备注】【教师备注】此题答案为**换元法求解**

【答案】(1) π .

(2) $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12} \right), \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2} \right)$ 单调递减. $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right)$ 单调递增.

【解析】(1) $\because f(x) = 4 \sin x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$

$$= 4 \sin x \cdot \left(\cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= 2 \left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$\therefore$ 最小正周期为 π .

$$(2) \because -\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \pi. -\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}.$$

$\therefore 2x - \frac{\pi}{3}$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减.

即 x 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right), \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

同理, x 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增.

$\therefore$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增.

在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right), \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

【余弦型】

10. 2018~2019学年天津河东区天津市第五十四中学高一上学期期末第18题9分 ★★★

已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$.

(1) 化简 $f(x)$

(2) $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调区间.

【答案】 (1) $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 单调增区间为 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 单调减区间为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

【解析】 (1) $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$

$$= \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$$

$$= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 由 $2x + \frac{\pi}{3} \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增.

$$\text{所以 } 2x \in \left[-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], \text{ 即 } x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{所以当 } k=1 \text{ 时, } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

【标注】【知识点】辅助角公式; 倍角、和差角公式综合; 二倍角的正弦; 二倍角的余弦; 正弦函数的图象和性质; 正弦型函数的图象与性质

【1: $\sqrt{3}$ 型】**11. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第18题12分 ★★**

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最值及取得最值时 x 的值.

【答案】 (1) $T = \pi$.

(2) 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取得最大值 0,

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - 1$
 $= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$,
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) $\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$\therefore 0 \leq 2x \leq \pi$,

$\therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$,

$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$,

$\therefore -\frac{3}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0$,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$,

即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取得最大值 0,

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；求正弦型函数的单调区间；二倍角的正弦；二倍角的余弦；辅助角公式

【1: 1型】**12. 2016~2017学年天津红桥区高一上学期期末第8题4分 ★★**

已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + m$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 则实数 m 的值为 ().

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + m$

$$= \cos x + \sin x + m = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + m$$

的最大值为 $\sqrt{2} + m = 2\sqrt{2}$ ，则实数 $m = \sqrt{2}$ ，

故选：B.

【标注】【知识点】函数的值域；正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

🔗 包罗万象 举一干从

13. 2015年天津南开区高三一模理科第15题13分 ★★★

设函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos^2 x$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间。

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值。

【答案】 (1) 最小正周期为 π ，单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 。

(2) $g(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ 。

【解析】 (1) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 + \cos 2x$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\therefore 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq (2k+1)\pi,$$

$$\therefore k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{单调递减区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

(2) 由 (1) 得： $g(x) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] + 1 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1,$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 2,$$

$$\therefore g(x) \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

14. 2017~2018学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第20题10分 ★★★

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

(2)

将函数 $y = f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ ，把所得到的图象再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y = g(x)$ 的图象，求 $y = g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ 上的最小值。

【答案】 (1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$

(2) $g(x)_{\min} = -\sqrt{3}$

【解析】 (1) 因为 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$ 。由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，得

$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$ 。

(2) 根据条件得 $g(x) = 2\sin\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right)$ ，当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ 时， $4x + \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，所

以当 $x = \frac{\pi}{8}$ 时， $g(x)$ 取得最小值 $g(x)_{\min} = -\sqrt{3}$

【标注】【知识点】辅助角公式；倍角、和差角公式综合；半角公式；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换

求对称轴和对称中心

15. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第19题10分 ★★★

已知函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期。

(2) 求 $f(x)$ 图象的对称轴方程和对称中心的坐标。

【答案】 (1) $T = \pi$ 。

(2) 对称轴方程为 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ 。

【解析】 (1) $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$(2) 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 即 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

则函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，对称中心为

$$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

【标注】【知识点】求正弦型函数的对称轴；求正弦型函数的周期；求正弦型函数的单调区间

16. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第16题8分 ★★

已知 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

求函数 $f(x)$ 的对称轴方程 .

【答案】 (1) $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$.

【解析】 (1) $\because f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \cos^2 x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$

$$= \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) ,$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) , \text{ 得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}) ,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的对称轴方程为 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}) ,$$

$$\text{综上所述, 结论是: 函数 } f(x) \text{ 的对称轴方程为 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}) .$$

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

17. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第18题13分 ★★★

已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及对称轴方程 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right]$ 的值域 .

【答案】 (1) $T = \pi$. $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} , (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$.

【解析】 (1) $f(x) = \sin^2 x - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= -\frac{3}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) .$$

$$f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi .$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbf{Z} ,$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} . k \in \mathbf{Z} .$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的对称轴方程为 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} .$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right], \\
 & 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right], \\
 & \text{故 } f(x) \text{ 的最小值为 } -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \\
 & \text{故 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right].
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质；辅助角公式；倍角、和差角公式综合

求解组合角

18. 2018~2019学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末（六校联考）第17题13分 ★★

已知 $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos\left(\pi + \frac{x}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间和对称轴方程.

(2) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = -\frac{1}{10}$, 求 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

【答案】 (1) $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$
 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

(2) $\frac{24}{25}.$

【解析】 (1) 已知 $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos\left(\pi + \frac{x}{2}\right),$

因为 $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \cos\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = -\cos \frac{x}{2},$

所以 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x,$

$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right),$

$= \frac{1}{2} - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$

$f(x) = \frac{1}{2} - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$

因为函数 $g(x) = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$

所以函数 $h(x) = -\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$

所以令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$

得 $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$

因为函数 $g(x) = \sin x$ 的对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$

所以令 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$

得 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$

所以 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(2) 由题意得, $f(x) = -\frac{1}{10}$ 且 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{10},$$

$$\text{得 } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5},$$

$$\text{因为 } \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\text{所以 } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \pm \frac{4}{5},$$

$$\text{因为 } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{2} < \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5},$$

$$= \frac{24}{25}.$$

$$\text{所以 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的值为 } \frac{24}{25}.$$

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；二倍角的正弦；半角公式

19. 2017~2018学年天津河东区天津市第四十五中学高一上学期期末第18题13分 ★★★

已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 当 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 求 $f\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $T = 2\pi$.

$$(2) \frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{10}.$$

【解析】 (1) $f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$$

$$(2) \because f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \sqrt{2} \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

$$\text{即 } \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5},$$

$$\because x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \therefore x_0 + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{从而 } \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$f\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left[\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \left[\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] = \sqrt{2} \left(\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

20. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第20题10分 ★★★

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($x \in \mathbf{R}$)，将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y = g(x)$ 的图象。

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式。

(2) 若 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \sqrt{3}$ ，求 $g(x_0)$ 。

【备注】【教师备注】分类讨论

【答案】(1) $g(x) = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x + 1$ 。

(2) -1 。

【解析】(1) $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \\
 &= 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x + 1.
 \end{aligned}$$

$$(2) f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 4 \cos \frac{x_0}{2} \sin\left(\frac{x_0}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \cos \frac{x_0}{2} \left(\sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{x_0}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x_0}{2} \sin \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x_0}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x_0 - \frac{1}{4} \cos x_0 - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

$$\text{有 } \sin\left(x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{得 } x_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } x_0 = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{有 } \begin{cases} g(x_0) = g\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(2k\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -1 \\ g(x_0) = g\left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = 4 \cos\left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + 1 = -1 \end{cases}.$$

综上， $g(x_0) = -1$ 。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换；利用正弦和差角公式求角求值；计算任意角的三角函数值

21. 2019~2020学年天津和平区高一上学期期末第20题10分 ★★

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x$ ($x \in \mathbf{R}$)。

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $g(x)$ 的图象, 已知 $g(x_0) = \frac{11}{5}$ ($x_0 \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$), 求 $\cos(2x_0)$ 的值.

【备注】 【教师备注】 **注意符号**

【答案】 (1) $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

(2) $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = \sqrt{2}\sin 2x + \cos 2x + 1$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$\therefore$ 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi,$
 $k \in \mathbf{Z},$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}.$

(2) 由题可知, $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$\therefore g(x_0) = 2\sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{11}{5}, \text{ 即 } \sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5},$$

$$\text{又 } \because x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 则 } 2x_0 - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\therefore \cos\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{1 - \sin^2\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos(2x_0) = \cos\left[\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \cos\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}+3}{10}.$$

【标注】 【知识点】 正余弦型、正切型函数图象变换; 求正弦型函数的单调区间