

01和差角、二倍角公式练习题

1. 和差角公式

基础计算

1. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第12题4分 ★

求值： $\sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 $\sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ$
 $= \sin(72^\circ + 18^\circ)$
 $= \sin 90^\circ$
 $= 1$.

【标注】【知识点】利用正弦和差角公式凑角求值

2. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第1题5分 ★

计算 $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$ 的结果等于 () .

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because \sin 43^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$
 $= \sin(43^\circ - 13^\circ)$
 $= \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{2}$.
故选 D .

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

3. 2019~2020学年天津滨海新区高一上学期期末第21题12分 ★★★

已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(1) 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$ 的值 .

(2) 求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值 .

【答案】 (1) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$.

(2) $\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$.

【解析】 (1) 由 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,
 $\therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$.

$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$.

(2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3}$
 $= -\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

4. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期末第4题3分 ★★

若 $\tan \alpha = 3$, $\tan \beta = 5$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为 ().

A. $-\frac{1}{8}$

B. $-\frac{4}{7}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{7}$

【答案】 A

【解析】 $\because \tan \alpha = 3$, $\tan \beta = 5$,

则 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$= \frac{3 - 5}{1 + 3 \times 5}$

$= -\frac{1}{8}$.

故选 A.

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用

 求组合角的值

5. 2019~2020学年天津和平区高一上学期期末第16题6分 ★★★

已知 α , β 为锐角, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1) 求 $\sin(\alpha - \beta)$ 的值.

(2) 求 $\alpha - \beta$ 的值.

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $-\frac{\pi}{4}$.

【解析】(1) $\because \alpha, \beta$ 为锐角,

$$\therefore \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \sin \alpha < \sin \beta,$$

$$\therefore \alpha < \beta,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(2) \alpha - \beta = -\frac{\pi}{4}.$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；正弦函数的图象和性质

🔗 凌角计算

6. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第33题3分 ★

若 $\cos\left(\frac{\pi}{5} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos \alpha \left(\frac{4\pi}{5} - \theta\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\cos \alpha \left(\frac{\pi}{5} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$
 $\cos \alpha \left(\frac{4\pi}{5} - \theta\right),$
 $= \cos \alpha \left[\pi - \left(\frac{\pi}{5} + \theta\right)\right],$
 $= -\cos\left(\frac{\pi}{5} + \theta\right),$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

7. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第35题3分 ★

已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = t$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{15\pi}{4} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-t$

【解析】 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = t,$
 $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right],$

$$\begin{aligned}
 &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = t. \\
 \sin\left(\frac{15\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4} + \alpha\right), \\
 &= -\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -t.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

🔔 求单个角的值

8. 2020~2021学年12月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第17题12分 ★★★

已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

若 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

【解析】(1) $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 0 < \alpha + \beta < \pi,$$

$$\text{又} \because \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) \\
 &= \sin \frac{2}{3}\pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{2}{3}\pi \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{3\sqrt{3}+4}{10}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用余弦和差角公式求角求值；利用正弦和差角公式求角求值

9. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第13题 ★★

已知 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\tan \beta =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】方法一：

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \tan \beta}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan \beta} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \beta = 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{方法二: } \because \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \tan \beta = \tan[\alpha - (\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan \alpha \cdot \tan(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正切

2. 二倍角公式

基础计算

10. 2018~2019学年天津高一上学期期末新四区联考第2题 ★

已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = (\quad)$.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $-\frac{5}{9}$

D. $\frac{7}{9}$

【答案】D

【解析】 $\because \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

故选 D.

【标注】【知识点】二倍角的余弦；半角公式

11. 2020~2021学年12月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第11题5分 ★

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

【标注】【知识点】二倍角的余弦

12. 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第13题4分 ★★

已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$ 的值为 _____ .

【答案】 $-\frac{7}{5}$

【解析】 $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$
 $= \frac{1 - 9 - 6}{9 + 1}$
 $= -\frac{7}{5}$.
故答案为： $-\frac{7}{5}$.

【标注】【知识点】二倍角的余弦；半角公式

13. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第12题4分 ★★

若 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____ .

【答案】 $-\frac{7}{25}$

【解析】 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$,
 $\sin 2\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{7}{25}$.

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；诱导公式

3. 综合

14. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第16题10分 ★★

已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 为第二象限角 .

(1) 求： $\sin 2\alpha$ 的值 .

(2) 求： $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .

【答案】 (1) $-\frac{24}{25}$.
(2) $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

【解析】 (1) 因为 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 为第二象限角 ,
所以 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

$$\begin{aligned} \text{又 } \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25} . \\ (2) \text{ 因为 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{7\sqrt{2}}{10} . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二倍角的正弦；两角和与差的余弦

15. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期末第14题4分 ★★

若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\therefore \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha}$
 $= \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)}$
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\therefore \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】半角公式；二倍角的余弦；两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

16. 2019~2020学年天津高一上学期期末（武清、蓟县、静海、宁河、宝坻）第18题12分 ★★★

已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- (1) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值 ;
 (2) 求 $\tan\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$
 (2) $-\frac{1}{7}$

【解析】 (1) $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
 $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 $\because \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 $\therefore \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 $\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 $= -\frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$(2) \text{ 由(1)得: } \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2$$

$$\text{故 } \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2\beta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\beta \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3} + 1}{1 + \frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{1}{7}.$$

【标注】【知识点】二倍角的正切；半角公式；两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦