

01和差角、二倍角公式

1. 和差角公式

1. 正弦、余弦、正切的和差角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【备注】 【答案】

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta .$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta .$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} .$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} .$$

【补充】

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

2. 和差角公式的推导

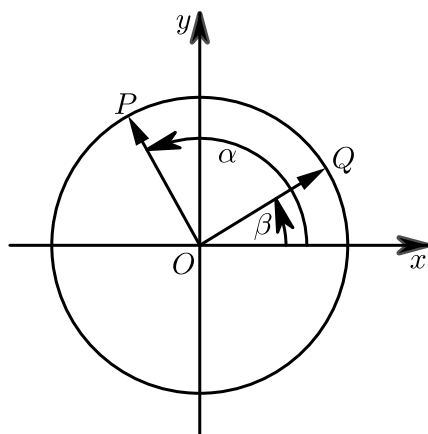


图 (a)

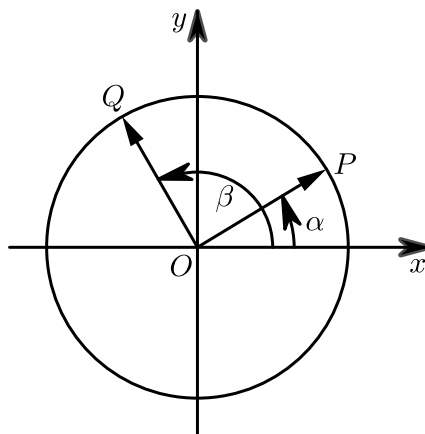


图 (b)

以余弦的和差角公式为例

【备注】【教师备注】

①两角差的余弦公式

以坐标原点为圆心作单位圆 O ，以 Ox 为始边作角 α 、 β ，它们的终边分别与单位圆 O 相交于点 P 、 Q ，则 $\vec{OP} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ， $\vec{OQ} = (\cos\beta, \sin\beta)$ ， $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = 1$ ，

$\therefore \alpha - \beta = \angle \vec{OP}, \vec{OQ} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ (如图(a))，

或 $\beta - \alpha = \angle \vec{OP}, \vec{OQ} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ (如图(b))，

$$\begin{aligned}\therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos \angle \vec{OP}, \vec{OQ} = \vec{OP} \cdot \vec{OQ} \\ &= (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

②两角和的余弦公式

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

 基础计算

1. 2019~2020学年天津河北区高一上学期期末第17题8分 ★★★

已知 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ， $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ， $\sin\beta = -\frac{12}{13}$ ， β 是第三象限角，求值：

(1) $\cos(\beta - \alpha)$.

(2) $\tan(\alpha + \beta)$.

【答案】 (1) $-\frac{33}{65}$.

(2) $\frac{16}{63}$.

【解析】 (1) $\because \cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ， $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，

$$\text{则 } \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$= \frac{4}{5},$$

$$\sin\beta = -\frac{12}{13}, \beta \text{ 是第三象限角,}$$

$$\begin{aligned}
\cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\
&= -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} \\
&= -\sqrt{\frac{25}{169}} \\
&= -\frac{5}{13}, \\
\cos(\beta - \alpha) &= \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \\
&= -\frac{5}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{4}{5} \\
&= \frac{15}{65} - \frac{48}{65} \\
&= -\frac{33}{65}.
\end{aligned}$$

(2) $\because \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} \\
&= -\frac{4}{3}, \\
\tan \beta &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\
&= \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} \\
&= \frac{12}{5}, \\
\therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\
&= \frac{-\frac{4}{3} + \frac{12}{5}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{12}{5}} \\
&= \frac{16}{15} \times \frac{5}{21} \\
&= \frac{16}{63}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦

2. 2018~2019学年12月北京西城区北京市第三十一中学高一上学期月考第7题4分 ★★

$\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 105^\circ$ 等于 () .

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

【答案】 D

【解析】 $\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 105^\circ$

$$= \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$$

$$= 1,$$

故选 D .

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式

3. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第36题3分 ★★

$$\sin 24^\circ \sin 96^\circ + \sin 66^\circ \cos 84^\circ = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\sin 24^\circ \sin 96^\circ + \sin 66^\circ \cos 84^\circ$
 $= \sin 24^\circ \cos 6^\circ + \cos 24^\circ \sin 6^\circ$
 $= \sin(24^\circ + 6^\circ)$
 $= \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{2} .$

【标注】 【知识点】 利用正弦和差角公式凑角求值

4. 2020~2021学年辽宁沈阳高一下学期期中（重点高中联合体）第1题5分 ★★

已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为 () .

- A. $-\frac{2}{11}$ B. $\frac{2}{11}$ C. $\frac{11}{2}$ D. $-\frac{11}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,
 $\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.
 $\because \tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2} = -\tan \beta$, $\therefore \tan \beta = -\frac{1}{2}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -\frac{2}{11}$,
 故选 : A .

【标注】 【知识点】 和差角公式化简求值综合运用 ; 两角和与差的正切

 求角的值

5. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期末第4题 ★★

已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 () .

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

【答案】 C

【解析】 $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
 $\therefore \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\therefore \alpha + \beta \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} . \\
 \therefore \alpha + \beta &= \frac{\pi}{4} .
 \end{aligned}$$

故选 C .

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值

6. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第37题3分 ★

已知 α, β 都是锐角, $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha + \beta =$ _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$,

$$\text{又 } 1 - \tan \alpha \tan \beta = 0 ,$$

$$0 < \alpha + \beta < \pi ,$$

$$\text{故 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} .$$

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用

7. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第17题6分 ★★

已知 α, β 为锐角 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$.

(1) 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值 .

(2) 求 $\cos \beta$ 的值 .

【答案】 (1) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$
(2) $\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) $\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\therefore \alpha + \beta \in (0, \pi) ,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{7} ,$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14} .$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \therefore \cos \beta &= \cos[(\alpha + \beta) - \alpha], \\
 \cos \beta &= \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
 &= -\frac{11}{14} \times \frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} \\
 &= \frac{49}{98} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用余弦和差角公式凑角求值；已知正弦余弦正切或其关系求值

8. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第13题4分 ★★

已知 α, β 为锐角，且 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$ ，则 $\alpha + \beta =$ _____ .

【答案】 135°

【解析】 $\because (1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$,

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta = -1,$$

$$\therefore \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1,$$

$$\text{即 } \tan(\alpha + \beta) = -1,$$

$\because \alpha, \beta$ 为锐角，

$$\therefore \alpha + \beta = 135^\circ.$$

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用

 凑角计算

9. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第6题3分 ★★★

已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$ ， $\tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ ，则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值等于 () .

A. $\frac{13}{18}$

B. $\frac{3}{22}$

C. $\frac{13}{22}$

D. $\frac{3}{18}$

【答案】 B

【解析】 $\because \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$ ， $\tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) &= \tan[(\alpha + \beta) - (\beta - \frac{\pi}{4})] \\
 &= \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\beta - \frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \frac{\pi}{4})} \\
 &= \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{3}{22}.
 \end{aligned}$$

故选 B .

【标注】【知识点】两角和与差的正切；和差角公式化简求值综合运用

10. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第9题3分 ★

已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) = (\quad)$

A. $\sqrt{3}$

B. $-\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

故选： D .

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

11. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第17题9分 ★★★★★

已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$.

(1) 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值 .

(2) 求 $\cos(2\beta + \alpha)$ 的值 .

【答案】 (1) $\frac{4}{5}$.

(2) $-\frac{63}{65}$.

【解析】 (1) $\because \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore \alpha + \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) ,$$

$$\text{又} \because \cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5} < 0 ,$$

$$\therefore \alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) ,$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{4}{5} .$$

(2) $\because \sin \beta = \frac{12}{13}$, 且 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{5}{13} ,$$

$$\therefore \cos(2\beta + \alpha) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta]$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13}$$

$$= \frac{-15 - 48}{65}$$

$$= -\frac{63}{65} .$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值

 求单个角的值

12. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第3题4分 ★

已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$ ，则 $\tan \alpha =$ () .

A. $-\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$ ，

$$\therefore \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = 2,$$

$$\therefore \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2,$$

$$\therefore 1 + \tan \alpha = 2 - 2 \tan \alpha,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{3}.$$

故选 C .

【标注】【知识点】利用正切和差角公式求角求值

13. 2020~2021学年天津高一上学期期末 (部分区) 第7题4分 ★★

已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\cos \alpha$ 的值为 () .

A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

【答案】 D

【解析】 因为 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，

$$\text{所以 } \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}, \text{ 可得 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \cos \alpha = \cos\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故选：D .

【标注】【知识点】利用余弦和差角公式求角求值

14. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第12题4分 ★★

已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，且 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4}{5}$ ，则 $\cos \alpha$ 的值为 _____ .

【答案】 $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

【解析】 因为 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,
 所以 $\frac{\pi}{3} < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,
 所以 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{5}$,
 所以 $\cos \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6}$,
 $= -\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$
 $= -\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.
 故答案为 : $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

【标注】 【知识点】 两角和与差的余弦；和差角公式化简求值综合运用

2. 二倍角公式

1. 二倍角公式

$\sin 2\alpha =$ _____

$\cos 2\alpha =$ _____

$\tan 2\alpha =$ _____

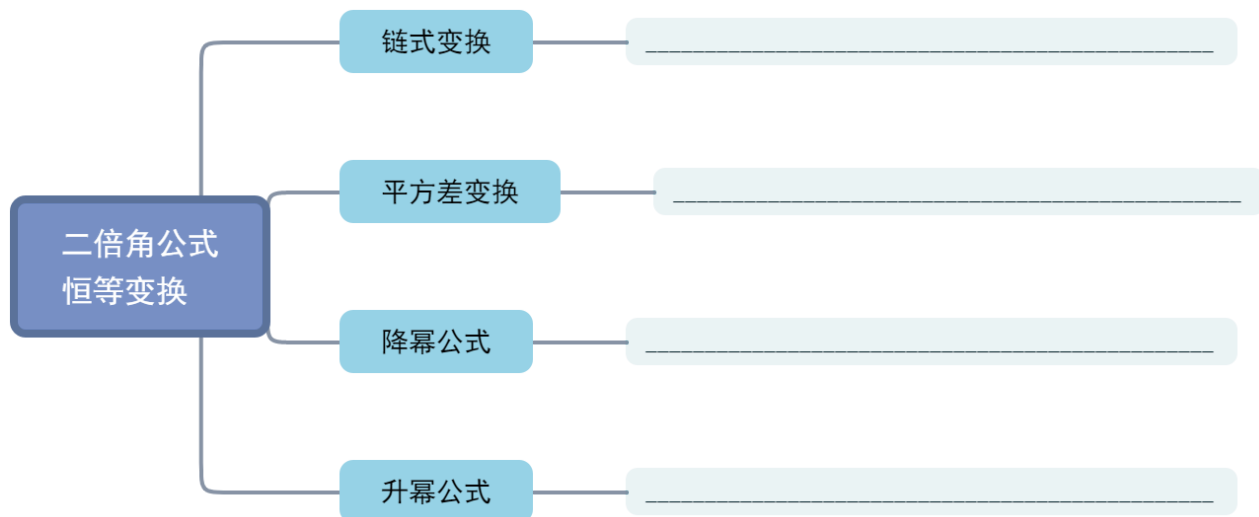
【备注】 【答案】

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} .$$

2. 相关恒等变换



【备注】【答案】

(1) 链式变换：

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$$

(2) 平方差变换：

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

(3) 降幂变换：

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

(4) 升幂变换：

$$1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

基础计算

15. 2018~2019学年天津静海县高一上学期期末第13题4分 ★★

已知 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos 2\alpha =$ _____ .

【答案】 $-\frac{1}{8}$

【解析】 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$.

故答案为： $-\frac{1}{8}$.

【标注】【知识点】二倍角的余弦；半角公式

16. 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第10题4分 ★

已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，则 $\sin 2\alpha =$ _____ .

【答案】 $-\frac{24}{25}$

【解析】 $\because \cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ，

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{24}{25}.$$

故答案为： $-\frac{24}{25}$.

【标注】【知识点】二倍角的正弦；半角公式

17. 2018~2019学年天津河东区天津市第五十四中学高一上学期期末第3题4分 ★★

若 α 是第三象限角， $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ，则 $\tan 2\alpha$ 的值为 () .

A.

B.

C.

D.

$$-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

【答案】 A

【解析】 因为 α 是第三象限角, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, 所以 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}, \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{因此 } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 二倍角的正切; 半角公式; 同角三角函数的基本关系式; 同角三角函数的基本关系式的化简和求值

|| 包罗万象 举一千从

18. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第34题3分 ★★

计算 $\frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ}$ 的值为 _____.

【备注】 【教师备注】 结合诱导公式

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ} \\ &= \frac{\sin(90^\circ + 20^\circ) \sin 20^\circ}{\cos 310^\circ} \\ &= \frac{\cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\cos(270^\circ + 40^\circ)} \\ &= \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 40^\circ} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简; 诱导公式; 半角公式; 二倍角的余弦

🔗 链式变换

19. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期末第12题4分 ★★

已知 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\sin \theta - \cos \theta > 1$, 则 $\sin 2\theta =$ _____.

【答案】 $-\frac{24}{25}$

【解析】 $\because \sin \theta = \frac{4}{5}$, $\sin \theta - \cos \theta > 1$,
 $\therefore \cos \theta < 0$,

$$\begin{aligned}\therefore \cos \theta &= -\frac{3}{5}, \\ \therefore \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{24}{25}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】半角公式；二倍角的正弦；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式

20. 2005年高考真题福建卷理科第17题12分 ★★

已知 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

求 $\sin x - \cos x$ 的值;

【答案】 (1) $-\frac{7}{5}$.

【解析】 (1) 方法一：由 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 方程两边平方得:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x &= \frac{1}{25} \\ \text{即 } 2 \sin x \cos x &= -\frac{24}{25}, (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{49}{25}\end{aligned}$$

又 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\therefore \sin x < 0, \cos x > 0, \sin x - \cos x < 0$

故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

方法二：联立方程 $\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{5} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

由①得 $\sin x = \frac{1}{5} - \cos x$, 将其代入②, 整理得 $25\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$,

$\therefore \cos x = -\frac{3}{5}$ 或 $\cos x = \frac{4}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$,

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5} \\ \cos x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；二倍角的正弦；半角公式

 半角计算

21. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第13题4分 ★

若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{8}$, 则 $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 $\because \cos 2\theta = -\frac{1}{8} = 1 - 2\sin^2 \theta$,

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 \theta &= \frac{9}{16}, \\ \therefore \theta &\in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right], \\ \therefore \sin \theta &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二倍角的正弦；半角公式

22. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第15题2分 ★★

已知 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ ， α 为第二象限角，则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的值为 () .

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】
$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{1+\cos \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

故选 A .

【标注】【知识点】半角公式

|| 精进不休 日新月异

23. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第13题2分 ★★

已知 $\tan 2\alpha = \frac{24}{7}$ ， $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ ，则 $\cos \alpha - \sin \alpha = ()$.

A. $\frac{7}{25}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{7}{5}$

D. $-\frac{7}{5}$

【答案】D

【解析】
$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{24}{7} > 0, \quad 2\alpha \in (\pi, 2\pi) \\ \pi &< 2\alpha < \frac{3\pi}{2}, \\ \therefore \frac{\pi}{2} &< \alpha < \frac{3\pi}{4} \text{ 第二象限} \\ \therefore \sin \alpha &> 0, \quad \cos \alpha < 0, \\ \cos \alpha - \sin \alpha &< 0, \\ \text{故选 D.}\end{aligned}$$

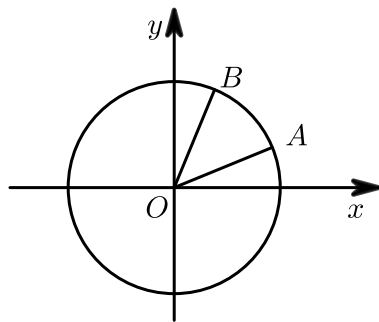
【标注】【知识点】二倍角的正切；半角公式

3. 和差角二倍角综合问题

基础综合计算

24. 2019~2020学年天津南开区高一上学期期末第18题10分 ★★★

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 轴为始边做两个锐角 α, β ，它们的终边分别与单位圆相交于 A, B 两点，已知 A, B 的横坐标分别为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}$ 。



(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值。

(2) 求 $2\alpha + \beta$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{4}{3}$.
(2) $\frac{3\pi}{4}$.

【解析】 (1) 由已知可得， $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ， $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$\because \alpha, \beta$ 为锐角，

$$\therefore \sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

$$(2) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \sin(2\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) + \alpha]$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } 0 < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2},$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；二倍角的正切；半角公

|| 精进不休 日新月异

25. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第17题11分 ★★★

已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

(3) 若 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

【答案】(1) $\frac{4}{3}$.

(2) $-\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

(3) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

【解析】(1) $\because \sin \alpha = \frac{4}{5}$ 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}$,
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$,
 $\therefore \tan \alpha$ 的值为 $\frac{4}{3}$.

综上所述, 结论为: $\tan \alpha$ 的值为 $\frac{4}{3}$.

(2) 由 (1) 知: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{7}{25},$$

$$\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} = \left(-\frac{7}{25}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{24}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{31\sqrt{2}}{50}$$

综上所述, 结论为: $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 $-\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

(3) $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 0 < \alpha + \beta < \pi,$$

$$\text{又 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{3}+4}{10},$$

综上所述, 结论为: $\sin \beta$ 的值为 $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

【标注】【知识点】二倍角的正弦；半角公式；二倍角的余弦；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦；两角和与差的正弦

26. 2019~2020学年11月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第16题5分 ★★★

已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $2\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$ ，则 $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{26}}{8}$

【解析】 $\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $2\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$ ，则

$$(2\sin\alpha - 3\cos\alpha) \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) = 0,$$

$$\therefore 2\sin\alpha = 3\cos\alpha, \text{ 又 } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\alpha &= \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \therefore \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{\sqrt{26}}{8}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二倍角的正弦；二倍角的余弦；半角公式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

 组合角计算（凑角）

27. 2019~2020学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期末第17题13分 ★★★

解答下列各题：

(1) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $2\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{6}{5}$ ，求 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{12})$ 。

(2) 已知 $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ， $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 。

① 求 $\sin x$ 的值。

② 求 $\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{31\sqrt{2}}{50}$ 。

(2) ① $\frac{4}{5}$ 。

② $-\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$ 。

【解析】 (1) 由已知可得： $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $2\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{6}{5}$ ，即 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$ ，

$$\therefore \cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{24}{25}, \\
\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \frac{7}{25}, \\
\therefore \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left[\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\
&= \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{4} + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{24}{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{31\sqrt{2}}{50}.
\end{aligned}$$

(2) ① 已知 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$,

$$\begin{aligned}
\therefore \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{7\sqrt{2}}{10}, \\
\therefore \sin x &= \sin\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\
&= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

② 由题意, $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{3}{5}$,

$$\begin{aligned}
\text{故 } \sin 2x &= 2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}, \\
\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 = -\frac{7}{25}, \\
\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \\
&= -\frac{24}{25} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -\frac{24 + 7\sqrt{3}}{50}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】半角公式；利用诱导公式化简；诱导公式；同角三角函数的基本关系式