

01和差角、二倍角公式

1. 和差角公式

1. 正弦、余弦、正切的和差角公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 和差角公式的推导

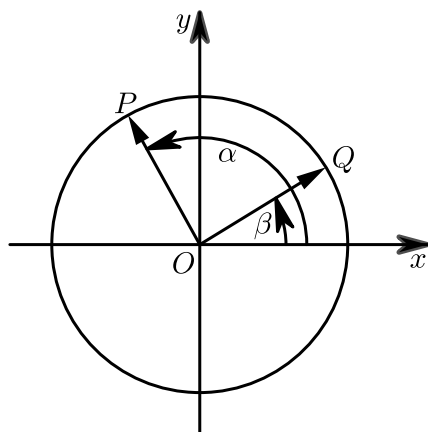


图 (a)

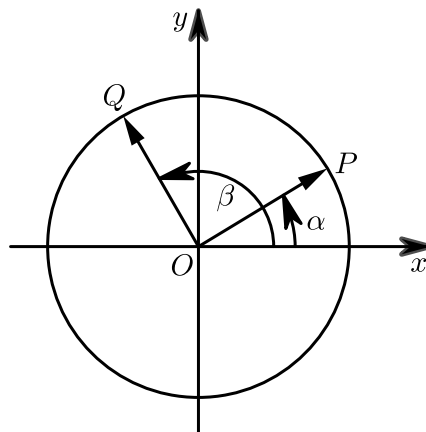


图 (b)

以余弦的和差角公式为例

基础计算

1. 已知 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \beta = -\frac{12}{13}$, β 是第三象限角, 求值:

(1) $\cos(\beta - \alpha)$.

(2) $\tan(\alpha + \beta)$.

2. $\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 105^\circ$ 等于 () .

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3. $\sin 24^\circ \sin 96^\circ + \sin 66^\circ \cos 84^\circ =$ _____ .

4. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为 () .

A. $-\frac{2}{11}$ B. $\frac{2}{11}$ C. $\frac{11}{2}$ D. $-\frac{11}{2}$

求角的值

5. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 () .

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

6. 已知 α, β 都是锐角 , $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha + \beta =$ _____ .

7. 已知 α, β 为锐角 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$.

(1) 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值 .

(2) 求 $\cos \beta$ 的值 .

8. 已知 α, β 为锐角 , 且 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$, 则 $\alpha + \beta =$ _____ .

凑角计算

9. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于 () .

A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{3}{22}$ C. $\frac{13}{22}$ D. $\frac{3}{18}$

10. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) =$ ()

A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$.

(1) 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值 .

(2) 求 $\cos(2\beta + \alpha)$ 的值 .

求单个角的值

12. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$, 则 $\tan \alpha =$ () .

A. $-\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

13. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos \alpha$ 的值为 () .

A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

14. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 且 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4}{5}$, 则 $\cos \alpha$ 的值为 _____ .

2. 二倍角公式

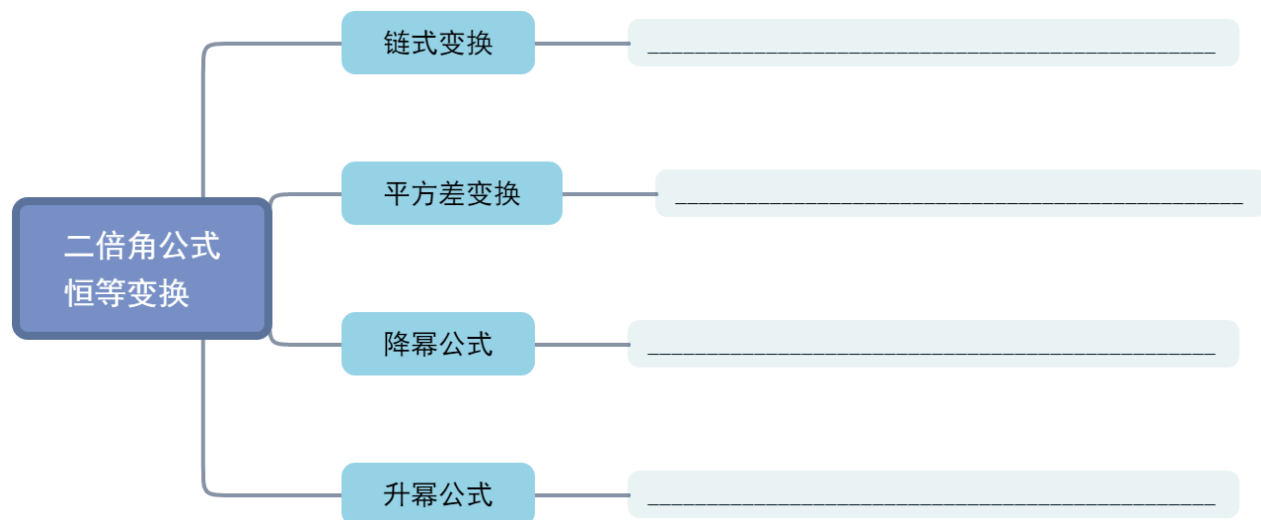
1. 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\cos 2\alpha = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\tan 2\alpha = \underline{\hspace{4cm}}$$

2. 相关恒等变换



基础计算

15. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____ .

16. 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____ .

17. 若 α 是第三象限角, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为 () .

A. $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

B. $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

包罗万象 举一千从

18. 计算 $\frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ - \sin^2 155^\circ}$ 的值为 _____ .

链式变换

19. 已知 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\sin \theta - \cos \theta > 1$, 则 $\sin 2\theta =$ _____ .

20. 已知 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

求 $\sin x - \cos x$ 的值;

半角计算

21. 若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{8}$, 则 $\sin \theta =$ _____ .

22. 已知 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, α 为第二象限角, 则 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的值为 () .

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

精进不休 日新月异

23. 已知 $\tan 2\alpha = \frac{24}{7}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\cos \alpha - \sin \alpha =$ () .

A. $\frac{7}{25}$

B. $\frac{1}{5}$

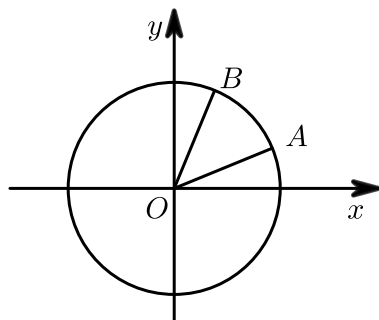
C. $\frac{7}{5}$

D. $-\frac{7}{5}$

3. 和差角二倍角综合问题

基础综合计算

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 Ox 轴为始边做两个锐角 α, β , 它们的终边分别与单位圆相交于 A, B 两点, 已知 A, B 的横坐标分别为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}$.



(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值.

(2) 求 $2\alpha + \beta$ 的值.

精进不休 日新月异

25. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

(3) 若 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

26. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 3\cos^2 \alpha = 0$, 则 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1} =$ _____ .

组合角计算 (凑角)

27. 解答下列各题:

(1) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{5}$, 求 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$.

(2) 已知 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

① 求 $\sin x$ 的值 .

② 求 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值 .