

02诱导公式

1. 同角三角函数的基本关系

1.同角三角函数的基本关系

	基本关系式	语言描述
平方关系		同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于1
商数关系		同一个角 α 的正弦、余弦的商等于角 α 的正切

【备注】 【答案】

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha ; (\cos \alpha \neq 0) ;$$

【补充】 同一个角的余弦、正弦的商等于角的余切： $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\sin \alpha \neq 0)$

2.基本关系式的变形

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha , \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha , \\ \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} , \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} , \\ (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2\sin \alpha \cos \alpha . \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha , \\ \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} \end{cases}$$

【备注】

【补充】 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha , \\ \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{\cot \alpha} \end{cases}$

1. 2017~2018学年海南三亚市三亚市华侨学校高二上学期期中文科第17题10分 ★★

已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值 .

【答案】 α 为第三象限角时, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$,
 α 为第四象限角时, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$.

【解析】 $\because \sin \alpha = -\frac{3}{5} < 0$,
 $\therefore \alpha$ 为第三象限或第四象限,
 当 α 为第三象限时, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$,
 $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$,
 当 α 为第四象限时, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$,
 $\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值;同角三角函数的基本关系式

2. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第5题3分 ★★

若 α 为第三象限的角,则 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$ 的值为().

- A. 3 B. -3 C. 1 D. -1

【答案】 B

【解析】 $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
 $= \frac{\cos \alpha}{|\cos \alpha|} + \frac{2 \sin \alpha}{|\sin \alpha|}$.

$\because \alpha$ 为第三象限角.

$\therefore \sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

原式 $= -1 - 2 = -3$.

故选 B.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】判断各象限三角函数值的正负;同角三角函数的基本关系式的化简和求值

3. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第12题2分 ★★

若 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{4}$,则终边过点 $(\sin \alpha, \tan \alpha)$ 的角是().

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

【答案】 D

【解析】 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{4} > 1$,
 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$,

故 α 为第二象限, $\tan \alpha < 0$,

则 $(\sin \alpha, \tan \alpha)$ 在第四象限.

故选 D.

【标注】【知识点】判断各象限三角函数值的正负

4. 2018~2019学年12月陕西西安碑林区西安市铁一中学高一上学期月考第2题4分 ★★

已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为 ().

A. $-\frac{1}{5}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】 B

【解析】 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

因为 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

所以 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{5}{25} - \frac{20}{25} = -\frac{3}{5}$. 故选 B.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式; 同角三角函数的基本关系式的化简和求值

5. 2017~2018学年河南郑州金水区郑州市第七中学高一下学期期中第9题5分 ★★

已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\tan \alpha =$ ().

A. -1

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

【答案】 A

【解析】 方法一: 由 $\begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$, 得 $2\cos^2 \alpha + 2\sqrt{2}\cos \alpha + 1 = 0$, 即 $(\sqrt{2}\cos \alpha + 1)^2 = 0$

, $\therefore \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\alpha \in (0, \pi)$, $\therefore \alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\therefore \tan \alpha = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$.

方法二: 因为 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$, 所以 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$, 所以 $\sin 2\alpha = -1$, 因为

$\alpha \in (0, \pi)$, $2\alpha \in (0, 2\pi)$, 所以 $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. 所以 $\tan \alpha = -1$.

方法三: 因为 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 所以 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$,

因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\tan \alpha = -1$.

【标注】【知识点】两角和与差的正弦

【素养】逻辑推理

6. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期末第5题 ★★

若 $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$ 的值为 ().

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because \frac{\cos x}{\sin x - 1} = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore 2 \cos x = 1 - \sin x$, 即 $\sin x = 1 - 2 \cos x$,
又 $\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
 $\therefore (1 - 2 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$, 解得 : $\cos x = \frac{4}{5}$.
 $\therefore \sin x = 1 - 2 \cos x = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$,
 $\therefore \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 同角三角函数的基本关系式的化简和求值 ; 同角三角函数的基本关系式

2. 弦化切问题

已知角 α 的正切值 , 求由 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 构成的齐次式 (可以是分式或者整式) :

【核心都是对 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 这个恒等式理解和运用】

(1) 对于分式齐次式 (次数为 n) , 因为 $\cos \alpha \neq 0$, 一般可在分子和分母中同时除以 $\cos^n \alpha$, 此时把所求代数式转化成关于 $\tan \alpha$ 的代数式 , 从而得解 .

①形如 $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \cos \alpha + d \cos \alpha}$ 的分式 , 可将分子、分母同时除以 $\cos \alpha$;

②形如 $\frac{a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha}{d \sin^2 \alpha + e \sin \alpha \cos \alpha + f \cos^2 \alpha}$ 的分式 , 可将分子、分母同时除以 $\cos^2 \alpha$.

(2) 对于整式齐次式 (次数为 n) , 把分母“1”等价成 $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^{\frac{n}{2}}$, 此时代数式转化为分式齐次式 , 然后按照 (1) 的处理方式处理 .

弦化切-分式齐次式

7. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第13题4分 ★★

计算 $\tan \alpha = 4$, 计算 $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 3 \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 9

【解析】 $\tan \alpha = 4$,

$$\text{原式} = \frac{2(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}}{(\sin \alpha - 3 \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 3} = \frac{9}{1} = 9 .$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式

8. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第6题4分 ★

已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha}$ 的值为 () .

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】
$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} &= \frac{1}{2} \tan \alpha - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故选 B .

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值

9. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第8题2分 ★★

若 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = 3$ ，则 $\tan \alpha =$ () .

A. $\frac{17}{8}$

B. $-\frac{17}{8}$

C. $-\frac{8}{17}$

D. $\frac{8}{17}$

【答案】B

【解析】
$$\frac{(\sin \alpha - 2 \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}}{(3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha - 2}{3 \tan \alpha + 5} = 3$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{17}{8}$$

故选 B .

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值

弦化切-整式齐次式

10. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第5题4分 ★★

已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$ 的值是 () .

A. $-\frac{2}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. -2

D. 2

【答案】B

【解析】 $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha - \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \\
 &\because \tan \alpha = 2, \\
 &\therefore \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4 - 2}{1 + 4} = \frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

故选 B.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值

11. 2020~2021学年12月天津河东区天津市第三十二中学高一上学期月考第13题5分 ★★

若 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，则 $\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha =$ _____ .

【答案】 $\frac{64}{25}$

【解析】 $\because \tan \alpha = \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned}
 &\therefore \cos \alpha \neq 0, \\
 &\therefore \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{1 + 4 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{1 + 4 \times \frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
 &= \frac{64}{25}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值

12. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第30题3分 ★★

已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 =$ _____ .

【答案】 2

【解析】

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1}{1} \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{1 + 2 \tan \alpha + 1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{2 + 4 + 4}{1 + 4} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式

3. 诱导公式

1. 记忆口诀：奇变偶不变，符号看象限。

①“奇变偶不变”：将 $\frac{\pi}{2}$ 视为一个基本单位，

当是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍时，函数名称_____

当是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍时，函数名称_____

②“符号看象限”：首先强调一点，诱导公式中的 α 为任意角，

在记忆诱导公式时，把 α 看成锐角对公式的记忆很有帮助。

在定号时要_____

【备注】【教师备注】

①“奇变偶不变”：将 $\frac{\pi}{2}$ 视为一个基本单位，

当是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍时，函数名称不变，

当是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍时，函数名称要改变，正弦、余弦互变，正切、余切互变。

②“符号看象限”：首先强调一点，诱导公式中的 α 为任意角，

在记忆诱导公式时，把 α 看成锐角对公式的记忆很有帮助。

在定号时要看原三角函数名称。

2. 常用诱导公式

公式（一）： $\sin(2k\pi + \alpha) =$ $\cos(2k\pi + \alpha) =$ $\tan(2k\pi + \alpha) =$	公式（二）： $\sin(\pi + \alpha) =$ $\cos(\pi + \alpha) =$ $\tan(\pi + \alpha) =$
公式（三）： $\sin(-\alpha) =$ $\cos(-\alpha) =$ $\tan(-\alpha) =$	公式（四）： $\sin(\pi - \alpha) =$ $\cos(\pi - \alpha) =$ $\tan(\pi - \alpha) =$
公式（五）： $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$	公式（六）： $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

【备注】【答案】

公式(一) :

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

公式(三) :

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

公式(五) :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha.\end{aligned}$$

公式(二) :

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

公式(四) :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

公式(六) :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha.\end{aligned}$$

【补充】

$$\begin{aligned}&① \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha; ② \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha; ③ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha; \\ &④ \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha; ⑤ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha; \\ &⑥ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha\end{aligned}$$

3. 诱导公式的作用

诱导公式	作用
公式一	将角转化为 $0 \sim 2\pi$ 的角求值
公式二	将 $0 \sim 2\pi$ 的角转化为 $0 \sim \pi$ 的角求值
公式三	将负角转化为正角求值
公式四	将 $\frac{\pi}{2} \sim \pi$ 的角转化为 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 的角求值
公式五	实现正弦与余弦、正切与余切的相互转化
公式六	实现正弦与余弦、正切与余切的相互转化

化简求值 (弧度制)

13. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第11题2分 ★★

已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 A .

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

14. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第13题4分 ★★

已知 $\sin(2\pi - \alpha) = -\frac{2}{3}$, 且 α 为第二象限角 , 则 $\tan(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】 $\because \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{2}{3}$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{2}{3} ,$$

又 $\because \alpha$ 是第二象限角 ,

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} ,$$

$$\therefore \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= -\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

故答案为 : $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

15. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第9题2分 ★★

若 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) < 0$ 且 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) < 0$, 则 θ 是 () .

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第三象限角

D. 第四象限角

【答案】 B

【解析】 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta < 0$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta < 0$$

$$\begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \sin \theta > 0 \end{cases}$$

$\therefore \theta$ 为第二象限 ,

故选 B .

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

16. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期末第3题5分 ★★

已知点 $(-4, 3)$ 是角 α 终边上的一点，则 $\sin(\pi - \alpha) = (\quad)$.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

【答案】 A

【解析】 点 $(-4, 3)$ 是角 α 终边上的一点，

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 计算任意角的三角函数值；利用诱导公式化简；诱导公式

17. 2019~2020学年天津高一上学期期末（武清、蓟县、静海、宁河、宝坻）第13题4分 ★

$$\cos\left(-\frac{23\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\cos\left(-\frac{23\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{23\pi}{3} + 8\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简；诱导公式

18. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第14题4分 ★★

已知角 θ 的终边过点 $(4, -3)$ ，则 $\frac{\sin(\pi + \theta) + \tan(-\theta)}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}} .$

【答案】 $-\frac{27}{16}$

【解析】 $\because$ 角 θ 的终边过点 $(4, -3)$ ，

根据三角函数的定义，

$$\text{得 } \sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{\sin(\pi + \theta) + \tan(-\theta)}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin \theta - \tan \theta}{-\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\sin \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{-\cos \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos \theta + \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{-\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}} \\
 &= -\frac{27}{16} . \\
 \text{故答案为: } &-\frac{27}{16} .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；诱导公式；同角三角函数的基本关系式；利用诱导公式化简

化简求值（角度制）

19. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第7题2分 ★

$$2 \sin 240^\circ - \sqrt{3} \cos 90^\circ = (\quad) .$$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 0

C. $-\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $2 \sin 240^\circ - \sqrt{3} \cos 90^\circ$

$$= -2 \sin 60^\circ = -\sqrt{3}$$

故选 C .

【标注】【知识点】利用诱导公式化简；诱导公式

20. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第1题2分 ★

$$\tan 210^\circ = (\quad) .$$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 $\tan 210^\circ = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$

【标注】【知识点】诱导公式；利用诱导公式化简

21. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第11题 ★★

$$\cos(-300^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\cos(-300^\circ) = \cos(60^\circ - 360^\circ)$
 $= \cos 60^\circ$
 $= \frac{1}{2}.$

【标注】 【知识点】 诱导公式；利用诱导公式化简

22. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第1题4分 ★

$\sin 660^\circ$ 的值为().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\sin 660^\circ = \sin(720^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$
故选 B.

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简；诱导公式

🗣 长化简

23. 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第20题8分 ★

已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - 3\pi) \cdot \cos(2\pi - \alpha) \cdot \sin\left(-\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}{\cos(-\pi - \alpha) \cdot \sin(-\pi - \alpha)}.$

(1) 化简 $f(\alpha).$

(2) 若 $\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{5},$ 求 $f(\alpha)$ 的值.

【答案】 (1) $f(\alpha) = -\cos \alpha.$

(2) $f(\alpha) = -\frac{1}{5}.$

【解析】 (1) $f(\alpha) = \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{(-\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha)} = -\cos \alpha.$

(2) $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{5},$
 $f(\alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{5}.$

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简；诱导公式

24. 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第17题10分 ★★

已知 $\sin(3\pi + \theta) = \frac{1}{3}$ ，求 $\frac{\cos(\pi + \theta)}{\cos \theta [\cos(\pi - \theta) - 1]} + \frac{\cos(\theta - 2\pi)}{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(\theta - \pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}$ 的值。

【答案】 18 .

【解析】 $\because \sin(3\pi + \theta) = -\sin \theta = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{3}，$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{-\cos \theta}{\cos \theta (-\cos \theta - 1)} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta \cdot (-\cos \theta) + \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{-\cos^2 \theta + \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \theta}{2}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} = 18 .$$

【标注】【知识点】诱导公式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式

25. 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第10题4分 ★★

化简：
$$\frac{\sin(2\pi + \alpha) \cos(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(-\pi - \alpha) \sin(-3\pi - \alpha) \sin(-\pi + \alpha) \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $\tan \alpha$

【解析】 原式 = $\frac{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{-\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha .$

故答案为： $\tan \alpha$.

【标注】【知识点】利用诱导公式化简；诱导公式

|| 包罗万象 举一千从

结合同角三角函数关系

26. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第12题4分 ★★

已知角 α 是第四象限角，且满足 $3\cos(-\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$ ，则 $\tan \alpha =$ _____ .

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】 $\because 3\cos(-\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$,

$$\therefore 3\cos \alpha - \cos \alpha = 1 ,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{2} ,$$

又 $\because \alpha$ 是第四象限角 ,

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore \tan \alpha = -\sqrt{3} .$$

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简；已知正弦余弦正切或其关系求值

27. 2020~2021学年天津东丽区高一上学期期末第17题7分 ★★★

已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

求值： $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(-\alpha)}$.

【答案】 (1) $-\frac{3}{7}$.

【解析】 (1) $\because \sin(\pi + \alpha) = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3}{5} ,$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{4}{3} ,$$

$$\therefore \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(-\alpha)}$$

$$= \frac{\cos \alpha - 2\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{3}{7} .$$

【标注】 【知识点】 利用诱导公式化简；已知正弦余弦正切或其关系求值；利用正切角公式其他应用