

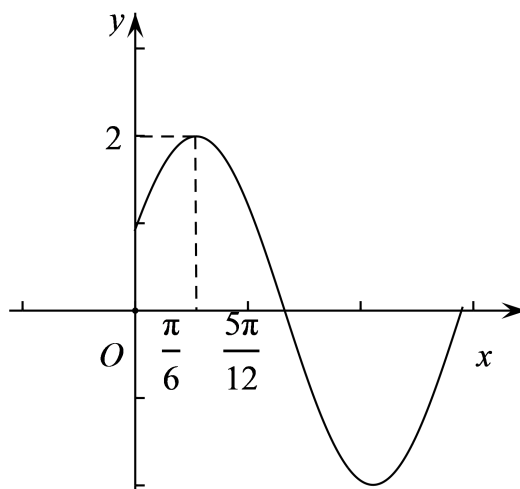
05三角函数图像的特殊性质及单调性练习题

1. 三角函数图像的特殊性质

 借助图像求解参数值

1. 2019~2020学年天津河北区高一上学期期末第10题4分 ★★

函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 () .



A. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

【答案】 D

【解析】 由图知: $\frac{1}{4}T = \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, $\therefore T = \pi$, $\omega = 2$, $A = 2$.

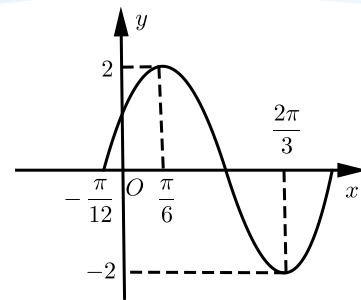
$$\therefore f(x) = 2 \sin(2x + \varphi).$$

$$\text{将 } \left(\frac{\pi}{6}, 2\right) \text{ 点代入 } f(x), 2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right), \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

2. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第7题4分 ★★

如图是函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 则 ω 和 φ 的值分别为 () .



A. $2, \frac{\pi}{6}$

B. $2, -\frac{\pi}{3}$

C. $1, \frac{\pi}{6}$

D. $1, -\frac{\pi}{3}$

【答案】 A

【解析】 由图知 $\frac{T}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2},$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 对应着最高点,}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

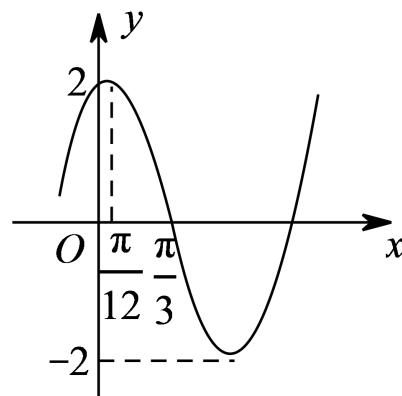
$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数图象求参数值

3. 2014年北京朝阳区高三二模理科第4题 ★★

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如右图所示, 则 $\varphi = ()$.



A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{3}$

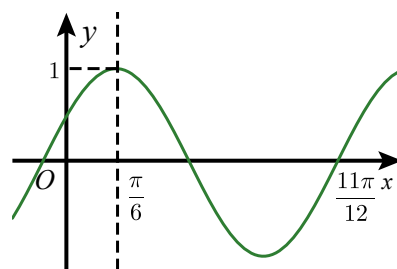
【答案】 D

【解析】 由题意得 $T = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$,
又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot 2 + \varphi = \pi + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$
故选D.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

4. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第13题4分 ★★

已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示, 则 $\omega =$ _____, $\varphi =$ _____.



【答案】 $2; \frac{\pi}{6}$

【解析】 $\frac{3}{4}T = \frac{11}{12}\pi - \frac{\pi}{6}$
 $\frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\pi$
 $T = \pi$
 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$
 $\therefore \omega = 2$.
 $\because x = \frac{\pi}{6}$ 时, 取得最高点,
 $\therefore 2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 $\because 0 \leq \varphi < 2\pi$,
 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

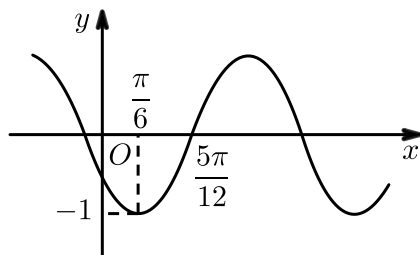
【标注】 【知识点】 已知正弦型函数图象求参数值

2. 正弦型三角函数的单调性

求解单调区间

5. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第8题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 () .



- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
 C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

【答案】 C

【解析】 由图可知, $f(x)$ 周期为 π , 故 $\omega = 2$,

将点 $\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$ 代入 $f(x)$ 得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $2x - \frac{5\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore x \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质；已知正弦型函数图象求参数值

🕒 判断在确定区间上的单调性

6. 2017~2018学年天津和平区高一上学期期末第5题4分 ★★

下列函数中, 周期为 π , 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数的是 ()

- A. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

【答案】 D

【解析】 解: 对于A, $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$,

$\therefore$ 函数 y 是单调减函数, 不合题意;

对于B, $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$,

$\therefore$ 函数 y 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 不是增函数, 不满足题意;

对于C, 对于 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$,

周期为 $T = \pi$, 不满足题意;

对于D, $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in (0, \pi)$,

$\therefore$ 函数 y 是单调递增函数, 且周期为 $T = \pi$, 满足题意.

故选: D.

【标注】【知识点】函数周期性判断; 求单调区间; 正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质; 余弦函数的图象和性质; 余弦型三角函数的图象与性质

7. 2018~2019学年天津宁河县高一上学期期末第8题4分 ★★

关于函数 $y = \sin 2x$, 下列说法正确的是().

A. 函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减

B. 函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

C. 函数图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

D. 函数图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称

【答案】 B

【解析】 A选项: $\because y = \sin 2x$,

令 $\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

可得, $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

令 $k = 0$ 可得, 单调递减区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 结合选项故A错误;

B选项: 令 $-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ 可得, $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$,

令 $k = 0$ 可得 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 可得函数在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 故B正确;

C选项: 当 $x = \frac{1}{2}\pi$ 时 $y = 0$ 不符合对称轴处取得最值的条件, 故C错误;

D选项: 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 不符合正弦函数对称中心函数值为0的条件,

故D错误.

故选B.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质; 正弦函数的图象和性质

8. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第10题3分 ★★

将函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$)的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若直线

$x = \frac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 的图象的一条对称轴, 则().

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $g(x)$ 为偶函数

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减

D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{9}\right]$ 上单调递增

【答案】 C

【解析】 由题意知 $g(x) = \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varphi\right]$,

因为直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 的图象的一条对称轴，

所以 $3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，

故 $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 。

因为 $0 < \varphi < \pi$ ，

所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ， $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 为非奇非偶函数。

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，则 $3x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减。

因为 $g(x) = -\sin 3x$ ，

所以 $g(x)$ 为奇函数，

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{9}\right]$ 时， $3x \in \left[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，

所以 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{9}\right]$ 上单调递减。

故选 C。

【标注】【知识点】诱导公式；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换；已知正弦型函数图象求参数值