

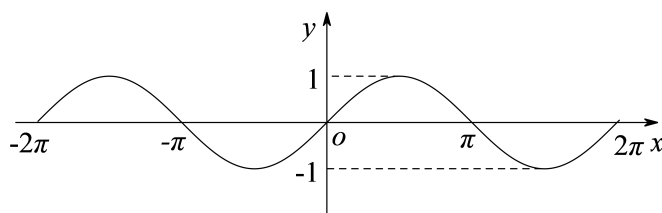
03标准三角函数图像及图像变换

1. 标准三角函数图像

正弦函数的图象与性质

$$y = \sin x$$

(1) 图象：



(2) 定义域：_____

(3) 值域：_____

(4) 最小正周期：_____

(5) 奇偶性：_____

(6) 单调性：_____；_____

(7) 对称性：对称轴_____；对称中心_____。

(8) 最大值轴：_____；最小值轴：_____。

(9) 零点：_____；

升零点：_____；降零点：_____

【备注】 (2) 定义域： $\mathbf{R}$ 。(3) 值域： $[-1, 1]$ 。(4) 最小正周期： 2π 。(5) 奇偶性：奇函数。

(6) 单调性： $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 增； $x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 减。

(7) 对称性：对称轴 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ；对称中心 $(k\pi, 0), k \in \mathbf{Z}$ 。

(8) 最大值轴： $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ；最小值轴： $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

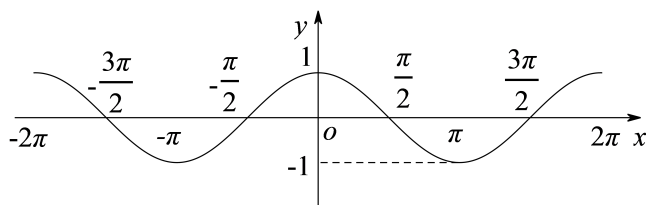
(9) 零点： $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$

升零点： $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ；降零点： $x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

余弦函数的图象与性质

$$y = \cos x$$

(1) 图象



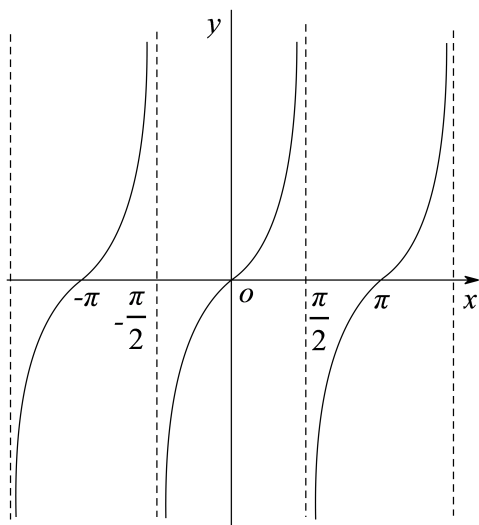
- (2) 定义域：_____
- (3) 值域：_____
- (4) 最小正周期：_____
- (5) 奇偶性：_____
- (6) 单调性：_____；_____
- (7) 对称性：对称轴_____；对称中心_____。
- (8) 最大值轴：_____；最小值轴：_____。
- (9) 零点：_____；
- 升零点：_____；降零点：_____；

【备注】 (2) 定义域： $\mathbf{R}$ 。(3) 值域： $[-1, 1]$ 。(4) 最小正周期： 2π 。(5) 奇偶性：偶函数。
 (6) 单调性： $x \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 增； $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 减。
 (7) 对称性：对称轴 $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ；对称中心 $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0), k \in \mathbf{Z}$ 。
 (8) 最大值轴： $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ；最小值轴： $x = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$
 (9) 零点： $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$
 升零点： $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ；降零点： $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

正切函数的图象与性质

$$y = \tan x$$

- (1) 图象：



- (2) 定义域：_____

- (3) 值域：_____
- (4) 最小正周期：_____
- (5) 奇偶性：_____
- (6) 单调性：_____
- (7) 零点：_____
- (8) 对称性：对称中心_____ .

【备注】 (2) 定义域： $\{x|x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. (3) 值域： $\mathbf{R}$.

(4) 最小正周期： π . (5) 奇偶性：奇函数 .

(6) 单调性：在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 增函数 . 最小正周期： π .

(7) 零点： $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$

(8) 对称性：对称中心 $(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbf{Z}$.

【注意注意注意！】对称中心也可以不在图像上！

(当然这个也没考过所以不是很重要但是觉得说了的话显得很有水平嗯就是这样！)

2. 利用标准三角函数图像求解简单问题

解不等式

1. 2020~2021学年天津南开区高一上学期期末第13题3分 ★

函数 $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的定义域为 _____ .

【答案】 $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}] , k \in \mathbf{Z}$

【解析】 由题意得 $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) .

【标注】 【知识点】求具体函数 (包括复合函数) 的定义域

精进不休 日新月异

2. 2018~2019学年12月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期月考第32题3分 ★★

函数 $f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x} + \lg(1 - \tan x)$ 的定义域是 _____ .

【答案】 $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$

【解析】
$$\begin{cases} 1 + 2\cos x \geq 0 \\ 1 - \tan x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \geq -\frac{1}{2} \\ \tan x < 1 \end{cases}$$

$$\left\{x | -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\} \cap \left\{x | -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}, k \in \mathbf{Z}$$

$$= \left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}.$$

【标注】【知识点】三角函数不等式

🔍 比较大小

3. 2019~2020学年11月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第8题5分 ★★

已知 $a = \sin \frac{1}{2}$, $b = \sin \frac{\pi}{6}$, $c = \tan 2$, 则 () .

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】C

【解析】 $\because a = \sin \frac{1}{2}$,
 $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$,
 $\therefore 0 < a = \sin \frac{1}{2} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
 则 $0 < a < \frac{1}{2}$,
 $b = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
 $\because \frac{\pi}{2} < 2 < \pi$,
 $\therefore \tan 2 < 0$, 即 $c < 0$.
 综上所述, 得 $b > a > c$,
 故选 C.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质；正切函数的图象和性质

4. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第5题4分 ★

设 $a = \sin 1$, $b = \cos 1$, $c = \tan 1$, 则 () .

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

【答案】D

【解析】 $\because 1$ 弧度的角大于 45° 的角且小于 60° ,
 $\therefore \tan 1 > \sin 1 > \cos 1$,
 $\therefore b < a < c$.
 故选 D.

【标注】【知识点】三角函数线；单位圆与三角函数线的运用

【教师备注】结合函数的奇偶性进行考查

【答案】 $c < b < a$

【解析】 $\because f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\text{即 } f(\tan(-55^\circ)) = f(-\tan 55^\circ) = f(\tan 55^\circ),$$

又 $\because y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为增函数，

$$\therefore \tan 55^\circ > \tan 47^\circ > \tan 45^\circ = 1,$$

又 $\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数，

$$\therefore f(\tan 55^\circ) > f(\tan 47^\circ) > f(1),$$

$$\therefore f(\tan(-55^\circ)) > f(\tan 47^\circ) > f(1),$$

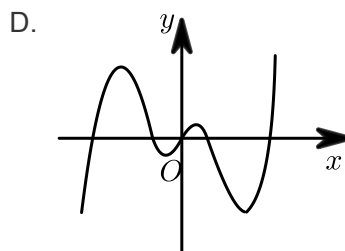
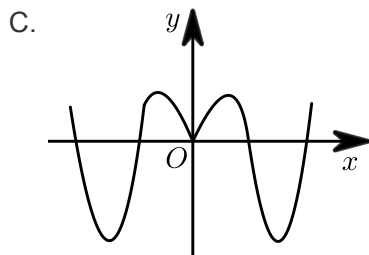
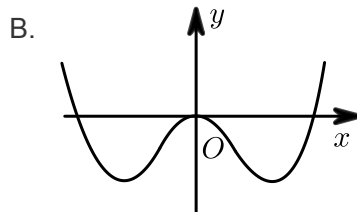
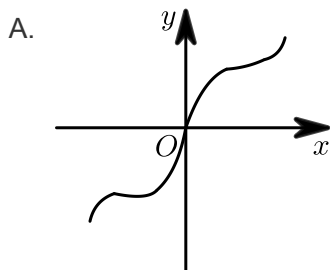
$$\text{即 } c < b < a.$$

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小；函数单调性与奇偶性综合问题；正切函数的图象和性质；正切型三角函数的图象与性质

判断图像

8. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第8题4分 ★★

函数 $f(x) = x \sin x$ 的图象大致为 () .



【备注】 【教师备注】 通过奇偶性判断函数是偶函数，排除AD；
x刚开始大于0时，函数值为正，所以排除B

【答案】 C

【解析】 由 $f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = x \sin x = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 为偶函数，故排除 A、D，

$$f'(x) = \sin x + x \cos x,$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时,

$$f'(x) = \sin x + x \cos x > \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}),$$

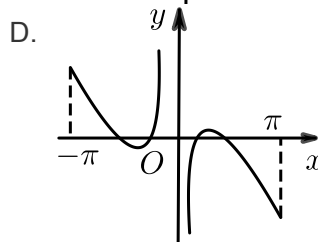
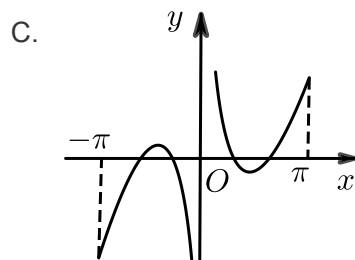
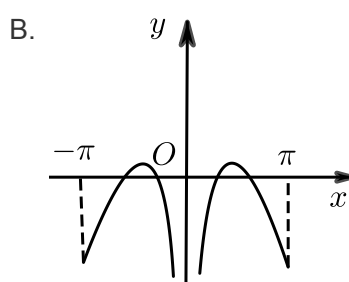
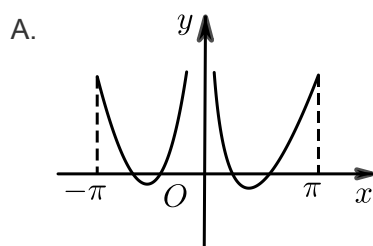
且 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}) > 0$,

所以 $f(x)$ 先递增, 故选: C.

【标注】【知识点】导数与单调性; 奇偶性; 正弦函数的图象和性质; 函数图象的识别问题

9. 2020~2021 学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末 (六校联考) 第4题4分 ★★

函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为 ().



【备注】【教师备注】通过奇偶性判断函数是奇函数, 排除AB;
x刚开始大于0时, 函数值为负, 所以排除C

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ 可以看作是

$g(x) = x - \frac{1}{x}$ 与 $h(x) = \cos x$ 两个函数的乘积,

其中 $-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$.

分别研究函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在各个区间的正负性

可知函数 $f(x)$ 的正负性符合D项.

【标注】【知识点】余弦函数的图象和性质

3. $y = |\sin x|$ 和 $y = |\cos x|$ 的周期

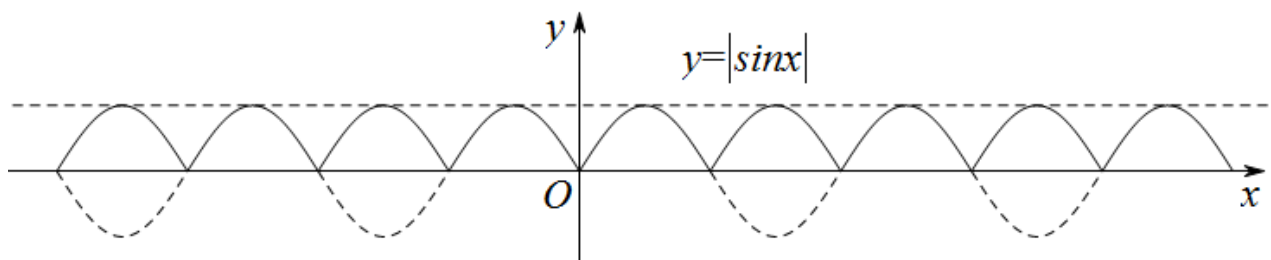
下面从数和形两个方面去考察 $y = |\sin x|$ 的周期:

(1) 对于函数 $y = f(x) = |\sin x|$, 假设其周期为 T , 则有 $f(x) = f(x + T)$ 恒成立, 即

$|\sin x| = |\sin(x + T)|$, 因此有 $\sin(x + T) = \pm \sin x$, 结合诱导公式, 可以知道满足条件的 $T = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

, 故原函数的最小正周期为 π .

(2) 做出 $y = |\sin x|$ 的图象如下 :



观察图象可以看出, 最小正周期为 π .

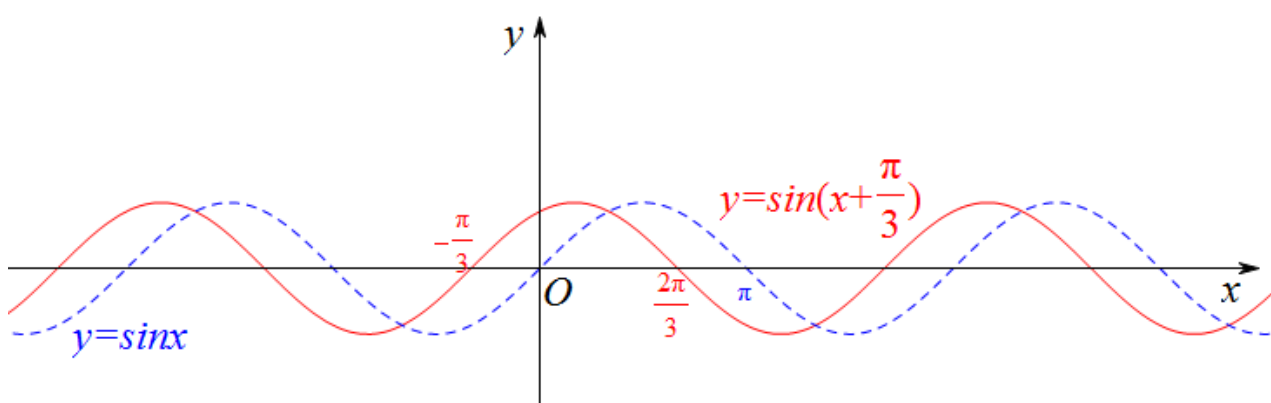
同理, 对于 $y = |\cos x|$, 其最小正周期也为 π .

4. 正弦型三角函数的图像变换

🔔 φ 对 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图象, 可以看作是把 $y = \sin x$ 图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的 .

如下图中的 $y = \sin x \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$:



【备注】【教师备注】可简记为“左 + 右 -”

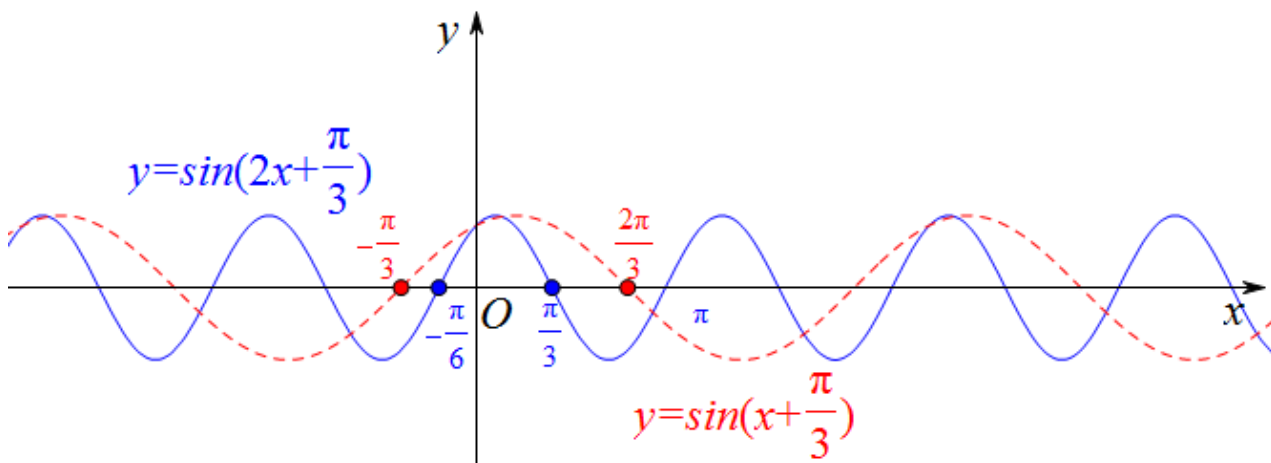
(1) $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象与 $y = \sin x$ 的图象形状是完全一样的, 二者可以通过左右平移变换得到, 称此变换为平移变换或相位变换;

(2) 左右平移是针对自变量 x 本身而言的, 因此**如果 x 有一系列诸如负号或者系数的前缀, 应该将其提取之后再行左右平移** .

🔔 ω 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图象, 可以看作是把 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的 .

如下图中的 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$:



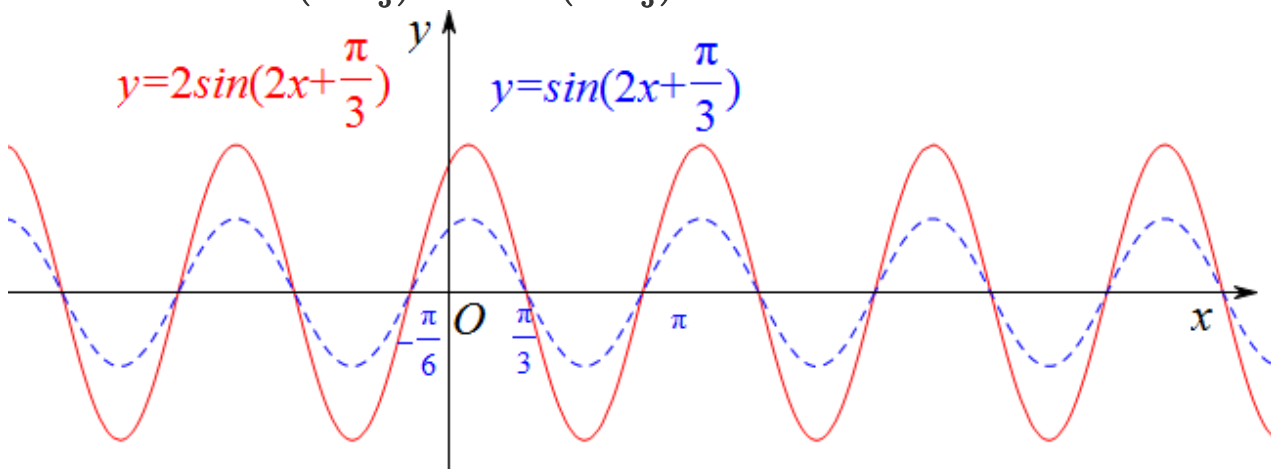
【备注】 【教师备注】

- (1) 由上面的变换发现， ω 可以控制变化函数的“胖瘦”，进而影响函数的周期。
- (2) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象的形状不同，此种变换为横向伸缩变换，也称周期变换。

🔗 $A (A > 0)$ 对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图象，可以看作是 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到的。

如下图中的 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \rightarrow y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$:



【备注】 【教师备注】

- (1) 由上面的变化发现， A 可以控制函数的“高矮”，进而影响函数的振幅。
- (2) 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) (x \in \mathbb{R})$ 的值域是 $[-|A|, |A|]$ 。
- (3) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象形状不同，此种变换称为纵向伸缩变换，也叫振幅变换。
- (4) 若 $A < 0$ ，此时可利用诱导公式 $-\sin x = \sin[x \pm (2k+1)\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 将系数化正

5. 利用图象变换法作 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的流程

由 $y = \sin x$ 的图象变换得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的两套流程：

前提：若 $A < 0$ 或者 $\omega < 0$ 则先将其化正。

🔗 流程一

相位变换：将 $y = \sin x$ 的图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象。

周期变换：将 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

振幅变换：将 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

🔗 流程二

周期变换：将 $y = \sin x$ 的图象上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin \omega x$ 的图象。

相位变换：将 $y = \sin \omega x$ 的图象上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位 (纵坐标不变) 得到 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

振幅变换：将 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

6. 图像变换典型问题

🔗 题型1

10. 2018~2019学年12月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期月考第8题4分 ★★

将函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)，再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到的图象对应的解析式为 ()。

- A. $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$ C. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ D. $y = -\sin(3x)$

【备注】【教师备注】先周期后相位

【答案】D

【解析】依题，将函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍，得到 $y = \sin 3x$ ，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到： $y = \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin(3x - \pi) = -\sin(3x)$ 。
故选 D。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图像变换

11. 2018~2019学年陕西西安碑林区西安市八十二中高一下学期期中第8题5分 ★★

将函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到的函数图象对应的解析式是（ ）.

- A. $y = \sin \frac{1}{2}x$ B. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

【答案】C

【解析】 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 横坐标伸长为原来 2 倍 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位.

$$\begin{aligned} y &= \sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

故选 C.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

12. 2019~2020学年天津河北区高一上学期期末第15题4分 ★★

将函数 $f(x) = \sin x$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

【解析】 将 $f(x) = \sin x$ 图象上每一点的横坐标，缩短为原来的一半，纵坐标不变得 $y = \sin 2x$

将图象右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度即为

$$\begin{aligned} y &= \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \text{即 } g(x) &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

13. 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第5题3分 ★★

将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象上所有的点的横坐标和纵坐标同时扩大为原来的 3 倍，再将图象向右平移 π 单位长度，所得图象的函数解析式为（ ）.

- A. $y = 3 \sin(3x - \pi)$ B. $y = 3 \sin(3x - 3\pi)$
C. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \pi\right)$ D. $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】D

【解析】 $f(x) = \sin x$ 的图象上所有点横坐标和纵坐标同时扩大为原来的 3 倍, 为 $y = 3 \sin \frac{1}{3}x$.

再将图象向右平移 π 个单位长度, 得到 $y = 3 \sin \frac{1}{3}(x - \pi) = 3 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

故选 D.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

14. 2018~2019 学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第 6 题 4 分 ★★

将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再把 (平移后的) 图象上每一点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到的图象的函数解析式为 ().

A. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ B. $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

【备注】【教师备注】先相位后伸缩

【答案】 B

【解析】 $y = \sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

再把每个点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

故选 B.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

15. 2020~2021 学年天津河西区高一上学期期末第 12 题 5 分 ★★

将函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将图象上每个点的横坐标和纵坐标都变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 则所得图象的函数解析式为 _____.

【答案】 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$

【解析】 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$y = 2 \sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位,

后得到 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 上每个点的横纵标都变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,

得到 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

【素养】 数学运算

16. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期末第7题3分 ★★

要得到函数 $y = \sin 4x$ 的图像，只需将 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 函数的图像（ ）。

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

【备注】【教师备注】只进行相位平移

【答案】C

【解析】 $\because$ 函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right]$ ，

要得到函数 $y = \sin 4x$ 的图像，

只需将 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位。

故选 C。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图像变换

17. 2019~2020学年天津南开区高一上学期期末第7题3分 ★

为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像，可以将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像（ ）。

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

【答案】B

【解析】将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，

即： $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

故选 B。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图像变换

18. 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第5题3分 ★★

为了得到函数 $y = \sin(2x + 1)$ 的图像，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图像上所有的点（ ）。

- A. 向左平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度
B. 向右平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度
C. 向左平行移动 1 个单位长度
D. 向右平行移动 1 个单位长度

【备注】【教师备注】平移长度的弧度表示较少见

【答案】A

【解析】 $y = \sin(2x + 1) = \sin 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ，

所以只需把 $y = \sin 2x$ 的图像上所有的点向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

19. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第5题5分 ★★

要得到 $y = \tan 2x$ 的图象，只需把 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象（ ）.

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

【备注】【教师备注】正切型函数的相位变换

【答案】D

【解析】 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ ，

要得到 $y = \tan 2x$ 的图象，

则只需将 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，

向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，

得到 $y = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan 2x$.

故选 D .

【标注】【知识点】平移变换问题；正余弦型、正切型函数图象变换

20. 2019~2020学年天津滨海新区高一上学期期末第7题5分 ★★

为了得到函数 $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象，只要把函数 $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有的点（ ）.

A. 横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ ，横坐标不变

【备注】【教师备注】考虑周期变换

【答案】B

【解析】 $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}, \text{纵坐标不变}]{\text{横坐标缩短为原来的}} y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ ，

故选 B .

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

21. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第7题 ★★

为得到 $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需把函数 $y = \cos x$ 的图象上所有的点（ ）.

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得各点的横坐标扩大为原来的 3 倍
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$
- C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ ，再向左平移 π 个单位长度
- D. 横坐标伸长到原来的 3 倍，再向右平移 π 个单位长度

【备注】【教师备注】需要借助诱导公式

【答案】 D

【解析】

$$\begin{aligned}
 y &= \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \cos\left[\frac{1}{3}(x - \pi)\right].
 \end{aligned}$$

$y = \cos x$ 到 $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ 横坐标扩大三倍，

$y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ 到 $y = \cos\left[\frac{1}{3}(x - \pi)\right]$ 向又平移 π 个单位，

故选 D.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换