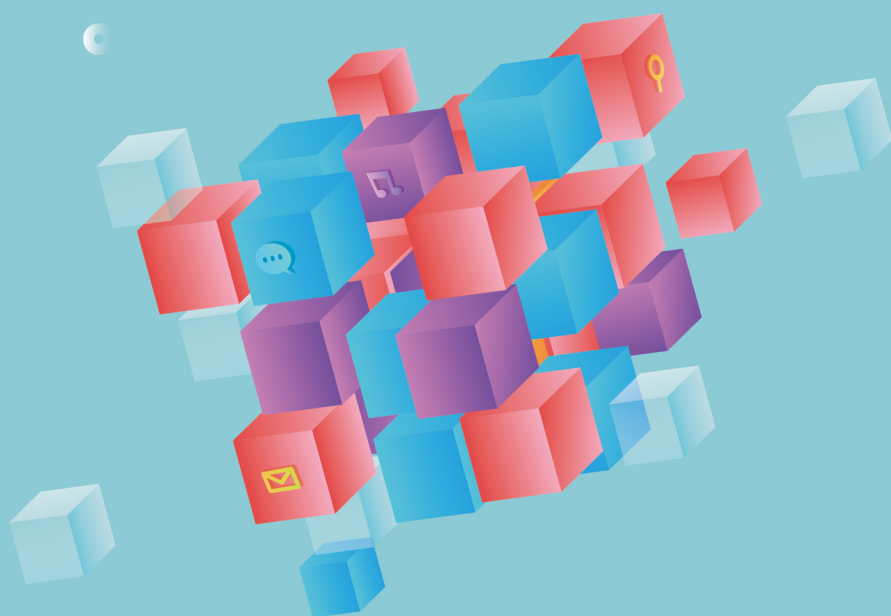


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

恭喜同学们完成了我们暑期的基础课程啦！是不是还意犹未尽呢？如果想要做一些更难更有挑战性的题目，而且迫不及待想要了解一下自己的掌握情况的话，不妨做一下这一模块设计的复习题和综合问题，不但可以帮助你了解自己的掌握情况，还可以通过计时提高自己的做题速度哟~

目 录

第 1 讲 直线与圆典型题型梳理.....	01
第 2 讲 圆锥曲线专项测试卷.....	05
第 3 讲 数列专项测试卷.....	11



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

直线与圆典型题型梳理





直线问题



直线的倾斜角

- 1 (5分) 直线 $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ 的倾斜角是 ().
A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
- 2 (5分) 一条直线过点 $A(1, 0)$ 和 $B(-2, 3)$, 则该直线的倾斜角为 ().
A. 30° B. 45° C. 135° D. 150°



定点问题

- 3 (5分) 直线 $l: kx - y + 2 - 2k = 0$ 过定点 _____.



平行线间距离

- 4 (6分) 两条平行直线 $l_1: 3x - 4y + 6 = 0$ 与 $l_2: 3x - 4y + C = 0$ 间的距离为 3, 则 $C =$ ().
A. 9 或 21 B. -9 或 21 C. 9 或 -9 D. 9 或 3



平行垂直关系

- 5 (10分) 已知直线 $l_1: x + my + 1 = 0$, $l_2: mx + (m + 2)y + 2 = 0$.
- (1) (5分) 若 $l_1 // l_2$, 则 $m =$ _____.
- (2) (5分) 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $m =$ _____.



点到直线的距离

- 6 (5分) 已知点 $(1, a) (a > 0)$ 到直线 $l: x + y - 2 = 0$ 的距离为 1, 则 a 的值为 _____.
- 7 (6分) 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的圆心到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为 _____.



求解直线方程

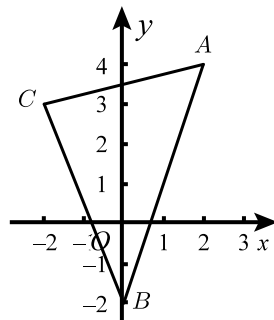
- 8 (12分) 求满足下列条件的直线方程.
- (1) (6分) 过点 $P(2, 3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线方程.
- (2) (6分) 过点 $(5, 10)$ 且到原点的距离是 5 的直线的方程.



9 (16分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(2, 4)$, $B(0, -2)$, $C(-2, 3)$. 求:

(1) (8分) AB 边上的中线 CM 所在直线的方程.

(2) (8分) AB 边上的高线 CH 所在直线的方程.



直线与圆



根据弦长求解圆的方程 + 求解圆的切线

10 (14分) 已知直线 $l: x - y + 3 = 0$ 被圆 $C: (x - a)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ($a > 0$) 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$.

(1) (6分) 求 a 的值.

(2) (8分) 求过点 $(3, 5)$ 与圆相切的直线的方程.



根据圆的位置求解圆的方程 + 求解弦长

11 (14分) 已知圆 C 的圆心在 $x + y = 0$ 上, 点 $A(2, 0)$ 在圆 C 上, 且圆 C 与直线 $x - y - 4 = 0$ 相切.

(1) (6分) 求圆 C 的标准方程.

(2) (8分) 过点 A 和点 $(3, 2)$ 的直线 l 交圆 C 于 A 、 E 两点, 求弦 $|AE|$ 的长.



根据圆的位置关系求解圆的方程 + 求解圆的切线

- 12 (14 分) 已知圆 C 经过点 $A(0, 3)$, $B(2, 3)$, 且圆心 C 在直线 $2x - y + 1 = 0$ 上.
- (1) (6 分) 求圆 C 的标准方程.
- (2) (8 分) 若直线 l 经过点 $P(2, -4)$ 且与圆 C 相切, 求直线 l 的方程.



研究圆上点到直线距离

- 13 (8 分) 设圆 $O: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), 定点 $A(3, 4)$. 若圆 O 上存在两点到 A 的距离为 2, 则 r 的取值范围为 _____.

第 2 讲

圆锥曲线专项测试卷





选择题

- 1 (5分) 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点坐标是 ().
A. $(-5, 0), (5, 0)$ B. $(0, -5), (0, 5)$ C. $(-4, 0), (4, 0)$ D. $(0, -4), (0, 4)$
- 2 (5分) 焦点在 y 轴上的双曲线, 实轴长 6, 虚轴长 8, 则双曲线的标准方程是 ().
A. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ B. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ C. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
- 3 (5分) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 ().
A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $y = 1$ D. $y = -1$
- 4 (5分) 顶点在原点, 对称轴为 y 轴, 且过点 $P(-4, -2)$ 的抛物线的标准方程是 ().
A. $y^2 = -x$ B. $x^2 = -8y$ C. $y^2 = -8x$ D. $x^2 = -y$
- 5 (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $P(2, 1)$ 作弦且弦被点 P 平分, 则此弦所在的直线方程为 ().
A. $x + 2y - 4 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$ C. $2x - y - 3 = 0$ D. $x - 2y = 0$
- 6 (5分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 与 A, B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ().
A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 7 (5分) 已知点 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 为正三角形, 则椭圆的离心率是 ().
A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 8 (5分) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A , $AK \perp l$, 垂足为 K , 则 $\triangle AKF$ 的面积是 ().
A. 4 B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 8



填空题

- 9 (5分) 对于常数 m, n , “ $mn > 0$ ” 是 “方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的曲线是椭圆” 的 _____ 条件.
(请用 “充分不必要” “必要不充分” “充要”、“既不充分也不必要” 中之一填空)



- 10 (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{3}{4}x$, 则该双曲线的离心率为 _____.
- 11 (5分) 若直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 与抛物线交于 A, B 两点, 且线段 AB 中点的横坐标为 2, 则线段 AB 的长 _____.
- 12 (5分) 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 若 $|PF_1||PF_2| = 12$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 _____.
- 13 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与双曲线 $x^2 - 8y^2 = 8$ 的右焦点重合, 点 P 是抛物线上的一个动点, 点 $A(4, 3)$, 则 $|PF| + |PA|$ 的最小值为 _____.



解答题

- 14 (10分) 解答下列问题.
- (1) (5分) 已知椭圆的焦点在 x 轴上, 长轴长为 4, 焦距为 2, 求该椭圆的标准方程.
- (2) (5分) 已知抛物线顶点在原点, 对称轴是 y 轴, 并且焦点到准线的距离为 5, 求该抛物线方程.



- 15 (8分) 已知椭圆: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过上焦点 F 作斜率为 1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 求弦 AB 的长.

- 16 (12分) 已知焦点在坐标轴上的双曲线 E 过点 $P(-3\sqrt{2}, 4)$, 它的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.
- (1) (5分) 求双曲线 E 的标准方程.
- (2) (7分) 若直线 $y = x + 1$ 与 E 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$.



- 17 (13分) 已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且过点 $(\sqrt{3}, 0)$, 过双曲线 C 的右焦点 F_2 , 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交双曲线于 A, B 两点, O 为坐标原点, F_1 为左焦点.
- (1) (5分) 求双曲线的标准方程.
- (2) (8分) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

- 18 (12分) 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 $A(2, y_0)$ 为抛物线上一点, 且 $|AF| = 4$.
- (1) (5分) 求抛物线的方程.
- (2) (7分) 直线 $l: y = x + m$ 与抛物线交于不同两点 P, Q , 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 33$ 其中 O 为坐标原点, 求 m 的值.

第 3 讲

数列专项测试卷





选择题

(本大题共 8 小题, 每题 5 分, 共 40 分)

- 1 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2$, $a_7 = 1$. 若数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列, 则 $a_9 = (\quad)$.
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$
- 2 (5 分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_1 a_3 + a_2 a_4 + \cdots + a_{10} a_{12} = (\quad)$.
 A. $\frac{4}{3}(4^{10} - 1)$ B. $\frac{4}{3}(4^{11} - 1)$ C. $\frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right)$ D. $\frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)$
- 3 (5 分) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2S_n = 3a_n - 3$, 则 a_4 等于 $(\quad)$.
 A. 27 B. 81 C. 93 D. 243
- 4 (5 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1} = a_1 + a_n + n$, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}} = (\quad)$.
 A. $\frac{2018}{2019}$ B. $\frac{2019}{2020}$ C. $\frac{4036}{2019}$ D. $\frac{2019}{1010}$
- 5 (5 分) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n - 2)$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = (\quad)$.
 A. 15 B. 12 C. -12 D. -15
- 6 (5 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $(\quad)$.
 A. $a_n = \frac{2}{n+1}$ B. $a_n = \frac{1}{n-1}$ C. $a_n = \frac{n}{n+1}$ D. $a_n = \frac{1}{n+1}$
- 7 (5 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_n > 0$, $a_1 = 256$, $S_3 = 448$, T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项乘积, 则当 T_n 取得最大值时, $n = (\quad)$.
 A. 8 B. 9 C. 8 或 9 D. 8.5
- 8 (5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - bn$, 若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 则实数 b 的取值范围为 $(\quad)$.
 A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, 3)$ D. $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$



填空题

(本大题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分)

- 9 (5 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_n + 1}{n} = 2n + 1$, 则 $a_1 + a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 10 (5 分) 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 \cdot a_6 = 27$, $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.



- 11 (5分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 12 (5分) 已知 S_n, T_n , 分别是等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{4n-2}, (n \in \mathbf{N}_+)$ 则 $\frac{a_{10}}{b_3 + b_{18}} + \frac{a_{11}}{b_6 + b_{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 13 (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的, 前项 n 和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 3n - 1$, 则 a_n 的通项为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 14 (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n-1}^2 = a_n^2 - 4$, 且 $a_1 = 1, a_n > 0$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.



解答题

(本大题共 4 小题, 15 题 11 分, 16 题 11 分, 17 题 11 分, 18 题 17 分)

- 15 (11分) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_7 = -26, a_5 + a_9 = -38$.
- (1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) (6分) 设数列 $(a_n + b_n)$ 是首项为 1, 公比为 t 的等比数列, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
- 16 (11分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 4$ 且 $S_n - 2a_n + 4 = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) (6分) 设 $b_n = a_n \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



17 (11分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 3$.

(1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) (6分) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

18 (17分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) (5分) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列.

(2) (4分) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) (8分) 记 $b_n = \frac{1}{na_n}$, T_n 为数列 $\{b_{2n-1} \cdot b_{2n+1}\}$ 的前 n 项和, 若 $T_n \leq \frac{\lambda}{b_{n+3}}$ 对任意的正整数 n 都成立, 求实数 λ 的最小值.