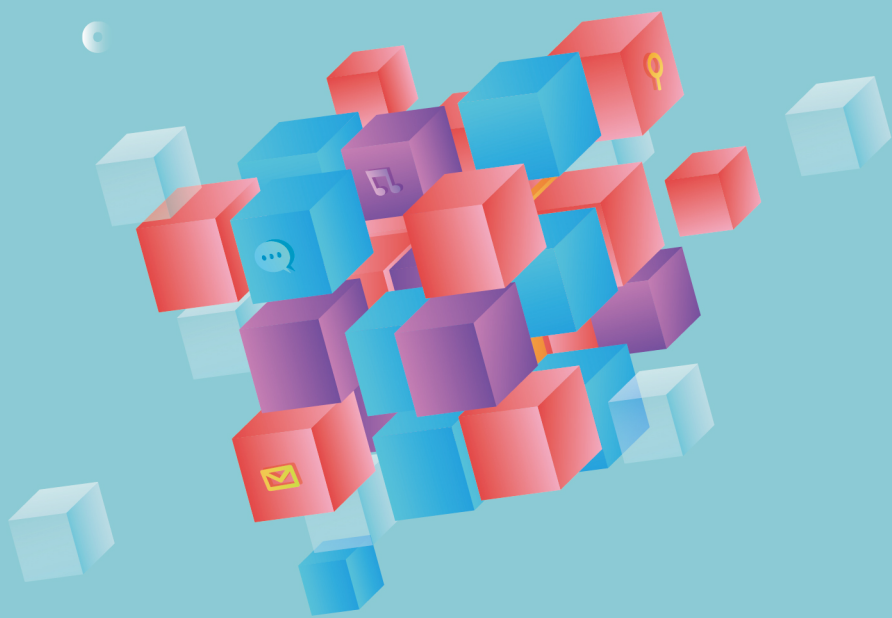


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

此讲设计的主要目的在于：让学生理解空间向量的概念并掌握其表示方法，并且能够在具体图形中完成空间向量的线性运算并正确使用运算律。而在这基础上，在进一步的学习后，能够用向量方法研究空间中的平行和垂直关系，并掌握利用空间向量求解空间角的求法。

目 录

第 1 讲 空间向量的基本概念..... 01

- | | | | |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 知 识 点 1 | 空间向量的有关概念 | 知 识 点 5 | 共面向量 |
| 知 识 点 2 | 空间向量的加减运算 | 知 识 点 6 | 空间向量的基本定理 |
| 知 识 点 3 | 空间向量的数乘运算 | 知 识 点 7 | 空间向量夹角 |
| 知 识 点 4 | 共线向量。 | 知 识 点 8 | 空间向量的数量积 |

第 2 讲 空间向量的运算.....09

- | | |
|---------|-----------|
| 知 识 点 1 | 空间直角坐标系 |
| 知 识 点 2 | 空间向量的坐标运算 |
| 知 识 点 3 | 综合坐标运算问题 |

第 3 讲 空间向量在立体几何中的应用.....15

- | | | | |
|---------|----------------|---------|------------|
| 知 识 点 1 | 直线所成角的向量公式 | 知 识 点 5 | 点到直线的距离公式 |
| 知 识 点 2 | 直线与平面所成角的向量公式 | 知 识 点 6 | 点到平面的距离公式 |
| 知 识 点 3 | 平面和平面所成的角 | 知 识 点 7 | 异面直线间距离的求法 |
| 知 识 点 4 | 向量证明空间中的平行垂直关系 | 知 识 点 8 | 线面距离的求法 |



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

空间向量的基本概念





空间向量的有关概念

1. 空间向量的定义

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫做空间向量.

2. 向量的长度 (模)

向量的大小叫做向量的长度或模，其模记为 $|\vec{a}|$ 或 $|\vec{AB}|$.

3. 空间向量的表示方法

a. 用有向线段表示.

b. 用字母 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 等表示.

4. 特殊向量

长度为 0 的向量叫做**零向量**，记为 $\vec{0}$.

模为 1 的向量称为**单位向量**.

方向相同且模相等的向量称为**相等向量**.

与向量 a 长度相等而方向相反的向量，称为 a 的**相反向量**，记为 $-\vec{a}$.



空间向量的加减运算

1. 向量的加减运算法则

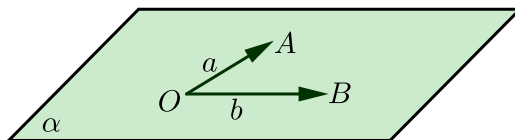
空间任意两个向量都可以平移到同一个平面内，成为同一平面内的两个向量.

已知空间向量 a, b ，我们可以把它们移到同一个平面

α 内，

如图，以任意点 O 为起点，

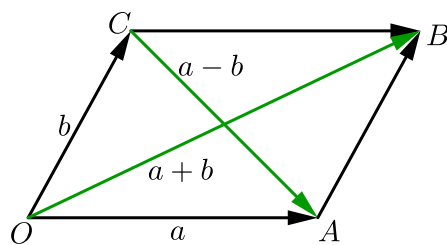
作向量 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$.



类似平面向量，定义空间向量的加法和减法运算 (如图):

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{b}.$$



2. 空间向量的加法运算满足的运算律

加法交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

加法结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. 向量加法的几个重要结论

①和向量的模满足: $\|\vec{a} - \vec{b}\| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向时，右等号成立，

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向时，左等号成立，

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 中有零向量时，两等号均成立，

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线时，上式的几何意义是三角形任意一边小于另两边之和，大于另两边之差.

②几个向量相加，可通过平移将它们转化为首尾相接的向量.

即 $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DN}$.

③首尾相接的若干个向量构成一个封闭图形，则它们的和为 $\vec{0}$.



空间向量的数乘运算

1. 空间向量的数乘运算的定义

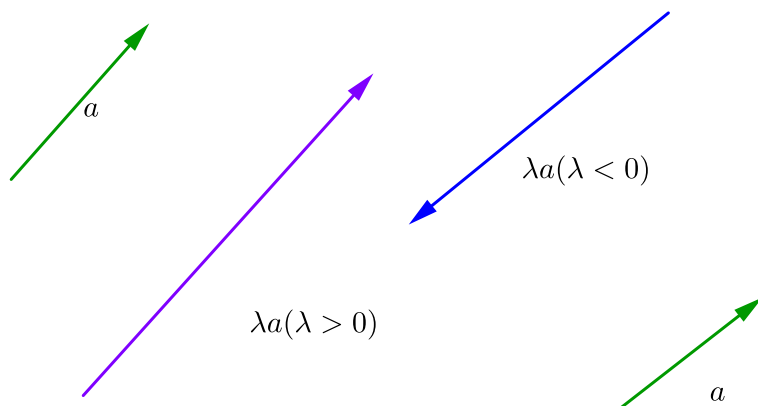
与平面向量一样，实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个向量，称为向量的数乘运算.

2. $\lambda\vec{a}$ 的方向和长度

当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相同；

当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反；

$\lambda\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍.



3. 空间向量的数乘运算满足的运算律

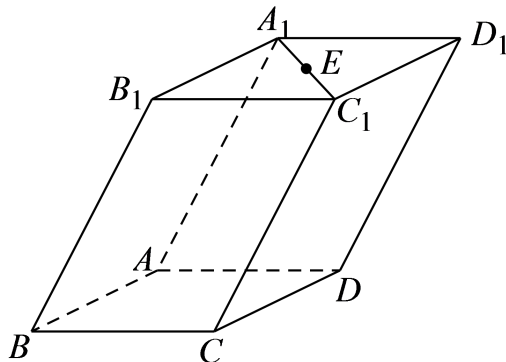
分配律: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.



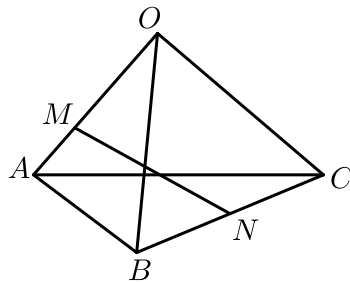
线性运算

- 1 如图所示, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为上底面对角线 A_1C_1 的中点, 若 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AA_1} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 则 ().



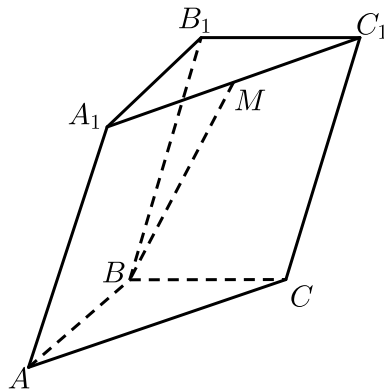
- A. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ B. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ C. $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ D. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

- 2 已知空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 点 M 在 OA 上, 且 $OM = 2MA$, N 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}$ 等于 ().



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

- 3 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M 为 A_1C_1 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{BM}$ 可表示为 ().



- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ C. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$



共线向量

1. 定义

如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么称这些向量为**共线向量**或**平行向量**。
 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} // \vec{b}$ 。

2. 共线向量定理

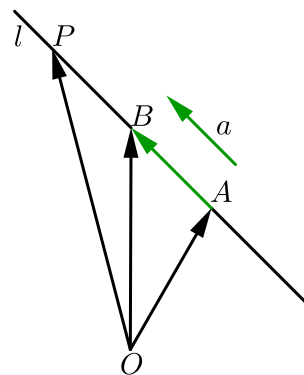
对空间任意两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)， $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

3. 共线向量定理的推论

如果 l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\vec{a}$ 的直线，那么对空间任一点 O ，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t 满足等式

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a}. \quad (i).$$

其中向量 $\vec{a}$ 叫做直线 l 的**方向向量** (如图)。



共面向量

1. 定义

通常我们把**平行**于同一平面的向量，叫做**共面向量**。

2. 共面向量定理

如果两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线，那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 。

3. 共面向量定理的推论

推论 1： 如图，空间一点 P 位于平面 MAB 内的充要条件是存在有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}$ ，(*)

或对空间任一定点 O ，有 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$ 。

在平面 MAB 内，点 P 对应的有序实数对 (x, y) 是唯一的；(*) 式叫做平面 MAB 的向量表示式。

推论 2： 空间中的一点 P 与不共线的三点 A, B, C 共面的充要条件是存在唯一的有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ ，且 $x + y + z = 1$ (其中 O 为空间任一点)。

4. 共面向量定理的延伸

如果三个不共面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足等式 $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0}$ ，那么 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。



共线共面问题

- 4 对于空间任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C , 有如下关系: $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 则 ().
- A. 四点 O, A, B, C 必共面
B. 四点 P, A, B, C 必共面
C. 四点 O, P, B, C 必共面
D. 五点 O, P, A, B, C 必共面



空间向量的基本定理

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **不共面**, 那么对空间任一向量 $\vec{p}$, 存在一个**唯一的**有序实数组 x, y, z , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

其中 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个**基底**, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做**基向量**.

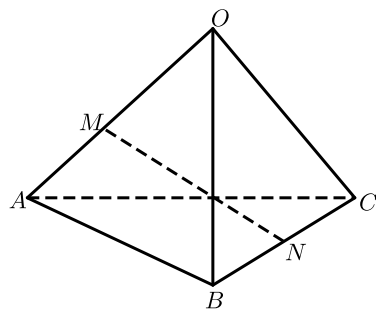
2. 空间向量基本定理的推论

设 O, A, B, C 是**不共面**的四点, 则对空间任一点 P , 都存在**唯一的**有序实数组 $\{x, y, z\}$, 使得 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.



基底 (线性运算)

- 5 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量, 则能构成空间的一个基底的一组向量是 ().
- A. $3\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$
B. $2\vec{b}, \vec{b} - 2\vec{a}, \vec{b} + 2\vec{a}$
C. $\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$
D. $\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$
- 6 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量不共面的是 ().
- A. $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$
B. $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$
C. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$
D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$
- 7 如图, 在三棱锥 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 点 M 在 OA 上, 且 $OM = 2MA$, N 为 BC 中点, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 将 $\overrightarrow{MN}$ 用基底表示, $\overrightarrow{MN} = \underline{\hspace{2cm}}$.





空间向量夹角

1. 夹角的定义

已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 在空间任取一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的**夹角**, 记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

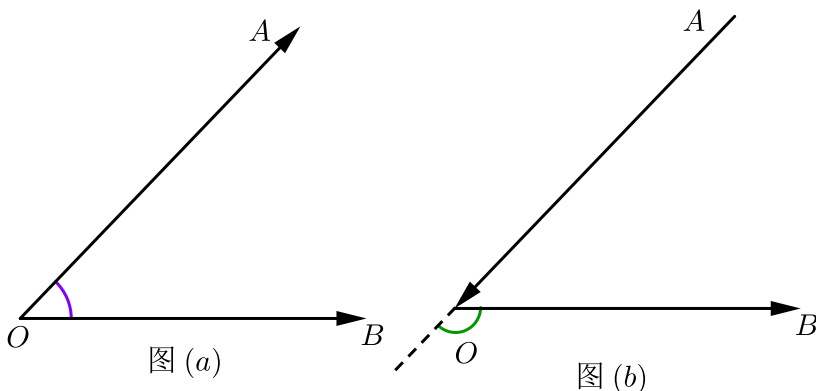
2. 夹角的范围

空间任意两个向量的夹角的取值范围是 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$.

特别地, 当 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ 时, 两向量**同向共线**; 当 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pi$ 时, 两向量**反向共线**.

当 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时, 两向量**垂直**, 记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

3. 注意区分下图中向量的夹角



空间向量的数量积

1. 定义

已知空间两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的**数量积**, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

2. 数量积的性质

①由 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ 可得向量自身的数量积就是模的平方.

② $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 的充要条件是 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量).

③两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角可由 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积表示: $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

④对任意向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 总有 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, 并且只有当 $\vec{a}, \vec{b}$ 平行时, 等号成立.

3. 数量积的运算律

数乘结合律: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

交换律: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

分配律: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. 特别说明

① a, b, c 为实数 ($b \neq 0$), 则 $ab = bc \Rightarrow a = c$, 但对于向量就不正确,

第 2 讲

空间向量的运算





空间直角坐标系

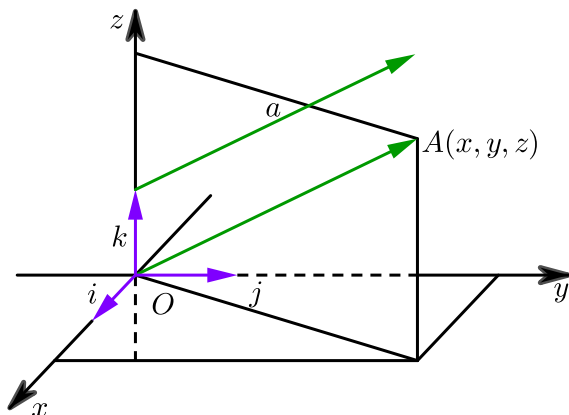
1. 单位正交基底

建立空间直角坐标系 $Oxyz$, 分别沿 x 轴, y 轴, z 轴的正方向引单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 这三个互相垂直的单位向量构成空间向量的一个基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, 这个基底叫做正交单位基底, 单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 都叫做坐标向量.

2. 空间直角坐标系的建立

在空间中选定一个单位正交基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, 其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 有公共起点 O .

如图所示, 以点 O 为原点, 分别以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的方向为正方向建立 x 轴, y 轴, z 轴, 这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$, 每两个坐标轴的平面分别称为 xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面.



3. 空间直角坐标系的画法

一般使 $\angle xOy = 135^\circ$ (或 45°), $\angle yOz = 90^\circ$.

4. 坐标

在空间直角坐标系中, 已知任一向量 $\vec{a}$, 根据空间向量分解定理, 存在唯一实数组 (a_1, a_2, a_3) , 使 $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, 有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 叫做向量 $\vec{a}$ 在此直角坐标系中的坐标. 上式可简记为 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

- 1 空间两点 A, B 的坐标分别为 $(x, -y, z)$, $(-x, -y, -z)$, 则 A, B 两点的位置关系是 ().
- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称 C. 关于 z 轴对称 D. 关于原点对称

- 2 在空间直角坐标系中, 已知点 $P(x, y, z)$, 给出下列 4 条描述:

- ①点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是 $(x, -y, z)$,
 ②点 P 关于 yOz 平面的对称点的坐标是 $(x, -y, -z)$,
 ③点 P 关于 y 轴的对称点的坐标是 $(x, -y, z)$,
 ④点 P 关于原点的对称点的坐标是 $(-x, -y, -z)$.

其中正确的个数是 ().

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0



空间向量的坐标运算

1. 空间向量的坐标

若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

则 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

2. 空间向量的坐标运算

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则容易得到:

$$(1) \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

$$(2) \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3);$$

$$(3) \text{数量积: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

3. 空间向量的平行垂直关系

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$(1) \vec{a} // \vec{b} (\vec{b} \neq 0) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

4. 空间中的夹角和模长公式

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$(1) \text{模长公式: } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$(2) \text{夹角公式: } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$



向量的坐标运算

3 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(2, -1, 3)$, $B(-4, 1, -1)$, 则线段 AB 的中点坐标是 ().

A. $(-1, 0, 2)$

B. $(-1, 0, 1)$

C. $(3, 0, 1)$

D. $(-1, 1, 1)$



数量积的坐标运算

4 已知向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = ()$.

A. 21

B. -21

C. 20

D. -20

5 已知空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 已知 $\vec{OA} = (1, 2, 3)$, $\vec{OB} = (2, 1, 2)$, $\vec{OP} = (1, 1, 2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 则当 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 取得最小值时, 点 Q 的坐标为 ().

A. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

B. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3})$

D. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$



平行垂直关系

- 6 设 l_1 的方向向量为 $\vec{a} = (1, 2, -2)$, l_2 的方向向量为 $\vec{b} = (-2, 3, m)$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 m 等于 ().
A. 1 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. 3
- 7 若 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, 且 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则实数 λ 的值是 ().
A. -1 B. 0 C. 1 D. -2
- 8 已知向量 $\vec{m} = (1, 1, 0)$, $\vec{n} = (-1, 0, 2)$, 且 $k\vec{m} + \vec{n}$ 与 $2\vec{m} - \vec{n}$ 互相平行, 则实数 k 的值是 ().
A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. -2
- 9 已知向量 $\vec{a} = (-2, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 4)$, $\vec{c} = (-4, -6, 2)$, 则下列结论正确的是 ().
A. $\vec{a} // \vec{c}$, $\vec{b} // \vec{c}$ B. $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ C. $\vec{a} // \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ D. $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$
- 10 已知 A 、 B 、 C 三点的坐标分别为 $A(4, 1, 3)$ 、 $B(2, -5, 1)$ 、 $C(3, 7, \lambda)$, 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, 则 λ 等于 ().
A. 28 B. -28 C. 14 D. -14
- 11 已知空间三点 $A(0, 1, 2)$, $B(1, 3, 5)$, $C(2, 5, 4 - k)$ 在一条直线上, 则实数 k 的值是 ().
A. 2 B. 4 C. -4 D. -2
- 12 已知 O 为坐标原点, 向量 $\vec{a} = (-2, 1, 1)$, 点 $A(-3, -1, 4)$, $B(-2, -2, 2)$, 若点 E 在直线 AB 上, 且 $\overrightarrow{OE} \perp \vec{a}$, 则点 E 的坐标为 ().
A. $(-\frac{6}{5}, -\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$ B. $(\frac{6}{5}, \frac{14}{5}, -\frac{2}{5})$ C. $(\frac{6}{5}, -\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$ D. $(-\frac{6}{5}, \frac{14}{5}, -\frac{2}{5})$
- 13 已知空间三点 $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, 在直线 OA 上有一点 H 满足 $BH \perp OA$, 则点 H 的坐标为 ().
A. $(-2, 2, 0)$ B. $(2, -2, 0)$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$



模长的坐标运算

- 14 若空间中两点分别为 $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, -1)$, 则 $|AB|$ 的值为 ____.
- 15 空间直角坐标系中的点 $A(2, 3, 5)$ 与 $B(3, 1, 4)$ 之间的距离是 ____.
- 16 若向量 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$, 则 $|2\vec{a} + \vec{b}| = ()$.
A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
- 17 在空间直角坐标系中, 设 $A(3, 3, 1)$, $B(1, -1, 5)$, $C(0, 1, 0)$, AB 的中点为 M , 则 $|CM|$ 等于 ____.

- 18 已知点 B 是点 $A(3, 4, 5)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影, 则 $|\overrightarrow{OB}| = ()$.
 A. $\sqrt{34}$ B. $\sqrt{41}$ C. 5 D. $2\sqrt{5}$
- 19 已知 $A(x, 5-x, 2x-1)$, $B(1, x+2, 2-x)$, 当 $|AB|$ 取最小值时, x 的值是 $()$.
 A. 19 B. $-\frac{8}{7}$ C. $\frac{8}{7}$ D. $\frac{19}{14}$
- 20 已知 $A(4, 1, 3)$, $B(2, -5, 1)$, C 是线段 AB 上一点, 且 $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}$, 则 C 点的坐标为 $()$.
 A. $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ B. $(\frac{8}{3}, -3, 2)$ C. $(\frac{10}{3}, -1, \frac{7}{3})$ D. $(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$



夹角的坐标运算

- 21 已知空间向量 $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $()$.
 A. 60° B. 120° C. 30° D. 150°
- 22 若 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(2, 2, 2)$, $D(0, 0, 3)$, 则 $\sin\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\rangle = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 23 若向量 $\vec{a} = (x, -1, 1)$ 与 $\vec{b} = (3, 1, -2)$ 的夹角为钝角, 则实数 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



综合坐标运算问题



模长的坐标运算 (含位置关系)

- 24 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, y, 1)$, $\vec{c} = (2, -4, 2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = ()$.
 A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. 3 D. 4
- 25 已知空间三点 $A(0, 2, 3)$, $B(-2, 1, 6)$, $C(1, -1, 5)$, 向量 $\vec{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 都垂直, 且 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, 且 $\vec{a}$ 的横、纵、竖坐标均为正, 则向量 $\vec{a}$ 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



共面向量

- 26 已知 $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, $\vec{c} = (0, -2, \lambda)$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量共面, 则实数 λ 等于 $()$.
 A. 2 B. 3 C. 1
- 27 已知 $\overrightarrow{PA} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{PB} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{PC} = (7, 6, \lambda)$, 若 P, A, B, C 四点共面, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} (\vec{b} \neq \vec{0}) \nRightarrow \vec{a} = \vec{c}$.

② $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 不一定等于 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$. 这是由于 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 表示一个与 $\vec{c}$ 共线的向量, 而 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ 表示一个与 $\vec{a}$ 共线的向量, 而 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 不一定共线.

5. 投影

① $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的方向上的**投影**: $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

② $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的方向上的**投影**: $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$



数量积的计算

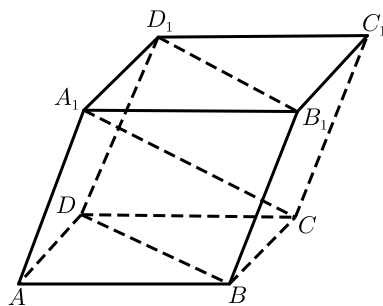
28 在正四面体 $P-ABC$ 中, 棱长为 2, 且 E 是棱 AB 中点, 则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ____.



模长计算

29 已知空间向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 中每两个的夹角都是 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 2$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| =$ ____.

30 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = AA_1 = 2$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, 则 A_1C 的长为 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

31 在底面是正方形的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \frac{\pi}{3}$, 则 $|\overrightarrow{AC_1}| =$ ().

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 3

D. $\sqrt{10}$

第 3 讲

空间向量在立体几何中的运用





直线所成角的向量公式

1. 异面直线所成角的向量关系

两条异面直线 a 与 b 的方向向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$, 当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角不大于 90° , 异面直线 a, b 所成的角 θ 与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角相等;

当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角大于 90° , 异面直线 a, b 所成的角与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角互补.

2. 空间中两条直线所成角的向量公式

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$, 则有:

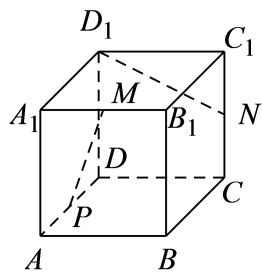
$$(1) l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 // \vec{v}_2;$$

$$(2) l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2;$$

$$(3) \cos \theta = |\cos \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle| = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

- 1 设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{a} = (2, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, 0, 4)$, 则直线 l_1, l_2 的夹角余弦值是 _____ (用数字作答).

- 2 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为 A_1B_1, CC_1 的中点, P 为 AD 上一动点, 记 α 为异面直线 PM 与 D_1N 所成的角, 则 $\sin \alpha$ 的值为 ().



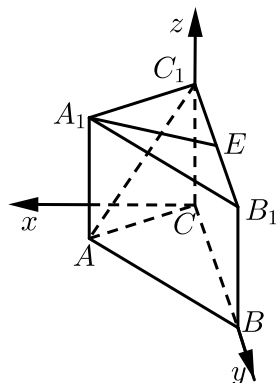
A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

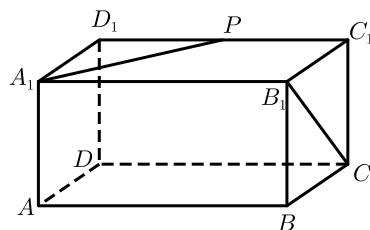
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

- 3 如图, 在几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为正三角形, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 若 E 是棱 B_1C_1 的中点, 且 $AB = AA_1 = CC_1 = 2BB_1$, 则异面直线 A_1E 与 AC_1 所成角的余弦值为 ().



- A. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$
- 4 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $AD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, P 是 C_1D_1 的中点, 则 $\vec{B_1C}$ 与 $\vec{A_1P}$ 所成角的大小为 ().



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°



直线与平面所成角的向量公式

1. 法向量

(1) 定义: 已知平面 α , 如果向量 $\vec{n}$ 的基线与平面 α 垂直, 则向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的**法向量**.

(2) 性质:

- ①由平面法向量的定义可知, 平面 α 的一个**法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量**.
 ②由于同时垂直于同一平面的两条直线平行, 可以推知, **一个平面的所有法向量互相平行**.

(3) 计算步骤:

【例题】已知点 $A(1, 2, 2)$, $B(2, 5, 4)$, $C(0, 1, 3)$, 求平面 ABC 的法向量.

2. 直线与平面所成角的向量关系

直线 a 的方向向量与平面 α 的法向量分别为 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$,

若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角不大于 90° , 直线 a 与平面 α 所成的角等于 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 夹角的余角,

若 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角大于 90° , 直线 a 与平面所成的角等于 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 夹角的补角的余角

3. 直线与平面所成角的向量公式及计算步骤

①建立空间直角坐标系;

②求出直线的方向向量 $\vec{AB}$ 和平面 α 的法向量 $\vec{n}$;

③设直线与平面 α 的夹角为 θ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), 则 θ 由**正弦**表达式 $\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ 唯一确定.

- 5 若直线 l 的方向向量为 $(2, 1, m)$, 平面 α 的法向量为 $(1, \frac{1}{2}, 2)$, 且 $l \perp \alpha$, 则 $m = (\quad)$.
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

- 6 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, 体积为 $\frac{9}{4}$, 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心, 则 PA 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角的大小为 $(\quad)$.
A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$



平面和平面所成的角

1. 二面角的定义

平面内的一条直线把平面分成两部分, 其中的每一部分叫做**半平面**.

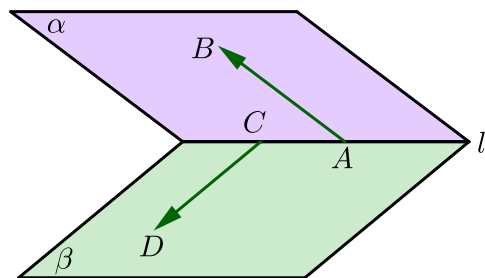
从一条直线出发的两个半平面组成的图形叫做**二面角**, 这条直线叫做**二面角的棱**, 每个半平面叫做**二面角的面**.

棱为 l , 两个半平面分别为 α 和 β 的**二面角**记作 $\alpha - l - \beta$.

图示:

AB, CD 分别是二面角 $\alpha - l - \beta$ 的两个面 α, β 内与棱 l 垂直的异面射线 (A, C 在棱 l 上),

则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 夹角的大小就是二面角的大小

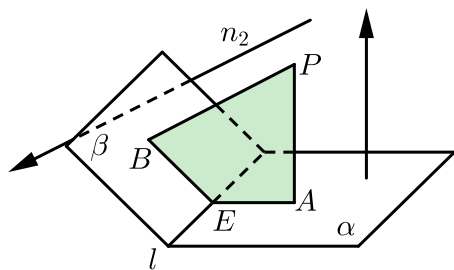


2. 二面角的向量关系

平面 α 与 β 的法向量分别为 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$, 则二面角与 $\vec{m}, \vec{n}$ 所在直线所成的夹角 θ 相等或互补. 记此二面角为 α 则:

当二面角 α 大于 90° 时, 则二面角 $\alpha = \pi - \theta$; 当二面角 $\alpha - l - \beta$ 不大于 90° 时, 则二面角 $\alpha = \theta$

3. 二面角的向量表示

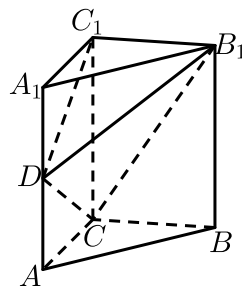


$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}.$$

- i. 当法向量 n_1 与 n_2 的方向**分别指向**二面角的内侧与外侧时，二面角 θ 的大小等于**法向量** n_1, n_2 的**夹角** $\langle n_1, n_2 \rangle$ 的大小.
- ii. 当法向量 n_1, n_2 的方向**同时指向**二面角的内侧或外侧时，二面角 θ 的大小等于**法向量** n_1, n_2 的**夹角的补角** $\pi - \langle n_1, n_2 \rangle$ 的大小.

7 已知点 E, F 分别在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1, CC_1 上，且 $B_1E = 2EB, CF = 2FC_1$ ，则平面 AEF 与平面 ABC 夹角的余弦值等于 _____ .

8 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $2AC = AA_1 = BC = 2$ ， D 为 AA_1 上一点. 若二面角 $B_1 - DC - C_1$ 的大小为 60° ，则 AD 的长为 () .



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



向量证明空间中的平行垂直关系

1. 平行关系的证明

- (1) 证明**线线平行**：证明直线的方向向量平行
- (2) 证明**线面平行**：证明直线的方向向量与平面的法向量垂直
- (3) 证明**面面平行**：证明平面的法向量相互平行

2. 垂直关系的证明

- (1) 证明**线线垂直**：证明直线的方向向量垂直
- (2) 证明**线面垂直**：证明直线的方向向量与平面法向量平行
- (3) 证明**面面垂直**：证明平面的法向量相互垂直



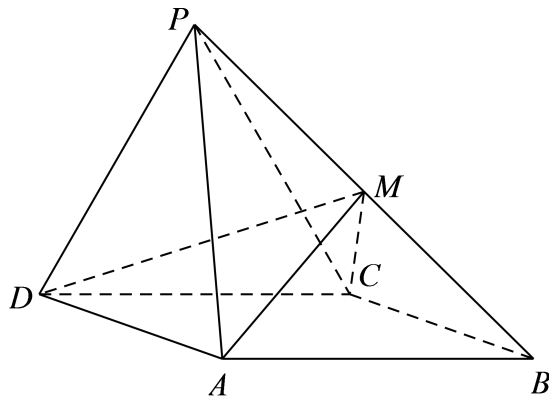
根据平行垂直关系求未知量

- 9 已知向量 $\vec{a} = (2, 4, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 // l_2$, 则 ().
 A. $x = 6, y = \frac{15}{2}$ B. $x = 3, y = \frac{15}{2}$ C. $x = 3, y = 15$ D. $x = 6, y = 15$
- 10 已知 $\vec{u} = (3, a+b, a-b)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 是直线 l 的方向向量, $\vec{n} = (1, 2, 3)$ 是平面 α 的法向量, 如果 $l \perp \alpha$, 则 $a+b =$ _____.
- 11 设 $\vec{u}, \vec{v}$ 分别是平面 α, β 的法向量, $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-2, -4, m)$. 若 $\alpha // \beta$, 则实数 $m =$ _____.
- 12 已知平面 α 内有一个点 $A(2, -1, 2)$, α 的一个法向量为 $\vec{n} = (3, 1, 2)$, 则下列点 P 在平面 α 内的是 ().
 A. $(1, -1, 1)$ B. $(1, 3, \frac{3}{2})$ C. $(1, -3, \frac{3}{2})$ D. $(-1, 3, -\frac{3}{2})$
- 13 若平面 α 与 β 的法向量分别是 $\vec{a} = (2, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$, 则平面 α 与 β 的位置关系是 ().
 A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 无法确定



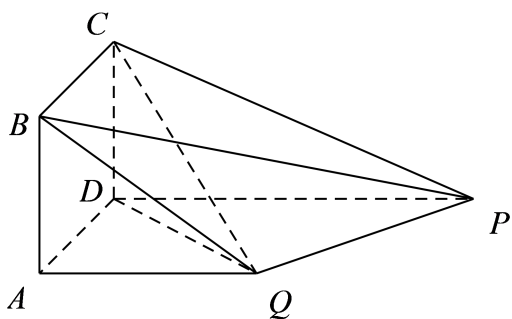
利用向量证明平行垂直关系

- 14 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PDC 是正三角形, 地面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形, $\angle DAB = 120^\circ$, 且侧面 PCD 与地面垂直, M 为 PB 的中点.



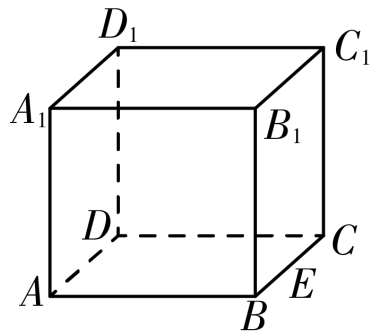
求证: $PA \perp$ 平面 CDM .

- 15 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD \parallel QA$, $QA = AB = \frac{1}{2}PD$.



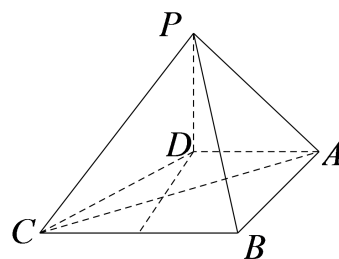
证明: 平面 $PQC \perp$ 平面 DCQ .

- 16 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, E 为 BC 的中点.



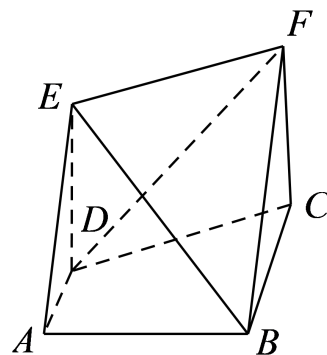
- (1) 求证: $C_1D \perp D_1E$.
- (2) 动点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AA_1}$ ($0 < \lambda < 1$), 使得 $BM \parallel$ 平面 AD_1E , 求 λ 的值.
- (3) 若二面角 $B_1 - AE - D_1$ 的大小为 90° , 求线段 AD 的长.

- 17 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一直角梯形， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB \perp BC$ ， $AB = AD = a$ ， $BC = 2a$ ， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ 。



在 PD 上是否存在一点 F ，使得 $PB \parallel$ 平面 ACF ，若存在，求出 $\frac{PF}{FD}$ 的值；若不存在，试说明理由。

- 18 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，四边形 $EDCF$ 为矩形， $CF = \sqrt{3}$ ，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ 。



求证： $DF \parallel$ 平面 ABE 。



点到直线的距离公式

1. 点到直线的距离

如图 2-6-1, 设 l 是过点 P 且平行于向量 $\vec{s}$ 的直线, A 是直线 l 外一定点. 作 $AA' \perp l$, 垂足为 A' , 则点 A 到直线 l 的距离 d 等于线段 AA' 的长度

2. 点到直线的距离的向量公式

向量 $\overrightarrow{PA}$ 在 s 上的投影的大小 $|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|$ 等于线段 PA' 的长度, 所以根据勾股定理有点 A 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{s}_0|^2}$.

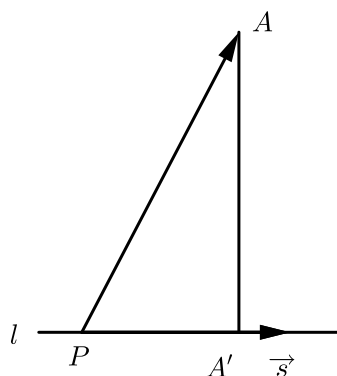
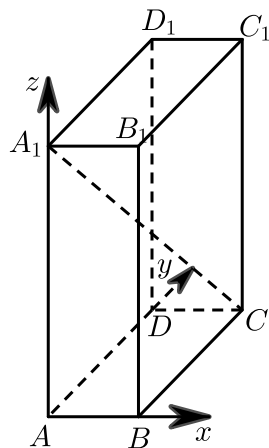


图2-6-1

- 19 已知直线 l 的方向向量为 $\vec{m} = (1, \sqrt{2}, -1)$, 若点 $P(-1, 1, -1)$ 为直线 l 外一点, $A(4, 1, -2)$ 为直线 l 上一点, 则 P 到直线 l 上的距离为 _____.
- 20 如图所示, 在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $BC = 2$, $AA_1 = 3$, 则点 B 到直线 A_1C 的距离为 ().



A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{2\sqrt{35}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{35}}{7}$

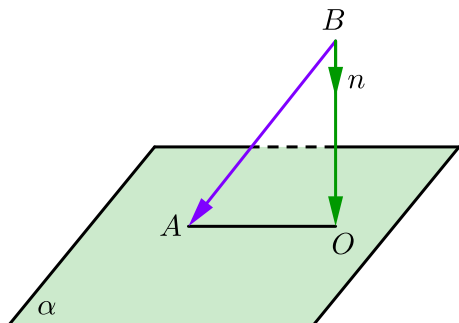
D. 1



点到平面的距离公式

1. 点面距离

如图, $BO \perp$ 平面 α , 垂足为 O , 则点 B 到平面 α 的距离就是线段 BO 的长度.

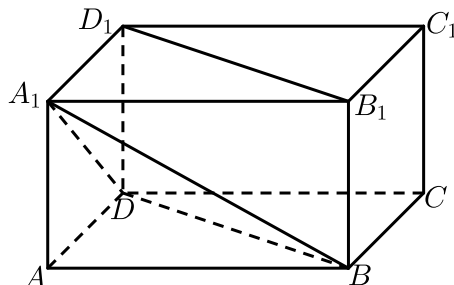


2. 点面距离的向量公式

若 AB 是平面 α 的任一条斜线段 (A 在 α 内), B 点到平面 α 的距离为 $|BO| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

21 已知平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (-2, -2, 1)$, 点 $A(-1, 3, 0)$ 在 α 内, 则 $P(-2, 1, 4)$ 到 α 的距离为 _____.

22 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2\sqrt{11}$, $AD = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{5}$.



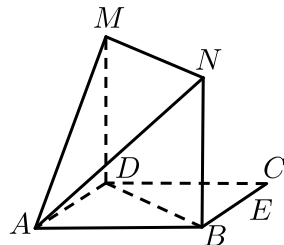
求点 C_1 到平面 A_1BD 的距离.

23 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = AA_1 = 4$, 点 D 是 AA_1 的中点, 则点 A_1 到平面 DBC_1 的距离是 _____.



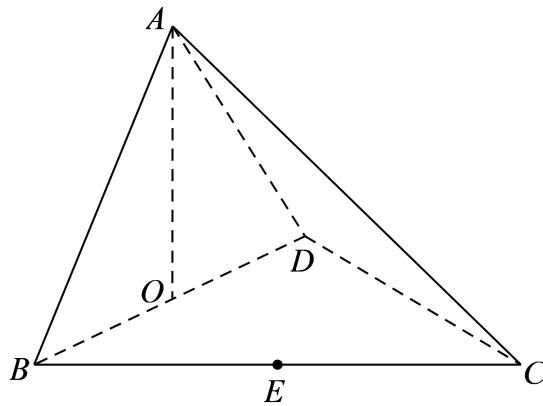
综合检验

- 24 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形， $MD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $NB \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $MD = NB = 1$ ， E 为 BC 中点.



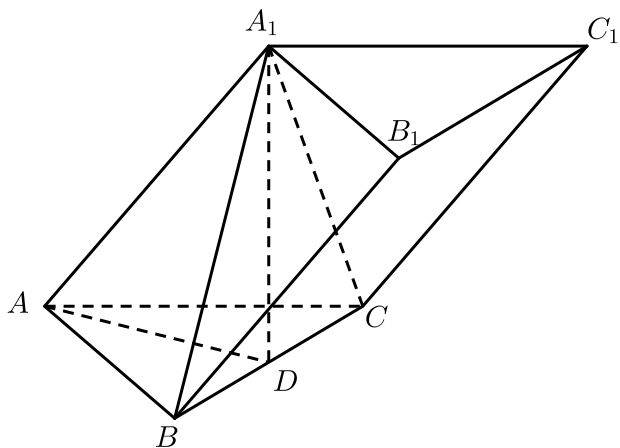
- (1) 求四棱锥 $A - BDMN$ 的体积.
- (2) 求点 C 到平面 AMN 的距离.
- (3) 在线段 AN 上，是否存在点 S ，使得 $ES \perp$ 平面 AMN ？若存在，求线段 AS 的长，若不存在，请说明理由.

- 25 如图，在三棱锥 $A - BCD$ 中， O ， E 分别是 BD ， BC 的中点， $CA = CB = CD = BD = 2$ ， $AB = AD = \sqrt{2}$.



- (1) 求证： $AO \perp$ 平面 BCD .
- (2) 求异面直线 AB 与 CD 所成的余弦值.
- (3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.

- 26 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $\triangle A_1AB$, $\triangle A_1AC$ 都是边长为 2 的等边三角形, $AB \perp AC$, D 为 BC 中点.



- (1) 求证: $A_1D \perp$ 平面 ABC .
- (2) 求二面角 $A_1 - AC - B$ 的余弦值.
- (3) 求点 B 到平面 AA_1C 的距离.



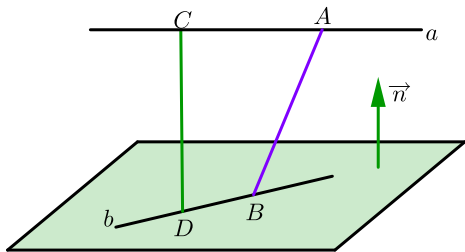
异面直线间距离的求法

1. 异面直线间距离

如图所示, CD 是异面直线 a 与 b 的公垂线段, 线段 CD 即为异面直线间的距离

2. 求解过程

A 、 B 分别为 a 、 b 上的两点, 令 $\vec{n} \perp a$, $\vec{n} \perp b$, 则 $\vec{n} // \vec{CD}$



$$\begin{aligned} \because \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}, \\ \therefore \vec{AB} \cdot \vec{n} &= \vec{AC} \cdot \vec{n} + \vec{CD} \cdot \vec{n} + \vec{DB} \cdot \vec{n}, \\ \text{即 } \vec{AB} \cdot \vec{n} &= \vec{CD} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

3. 异面直线距离的向量公式

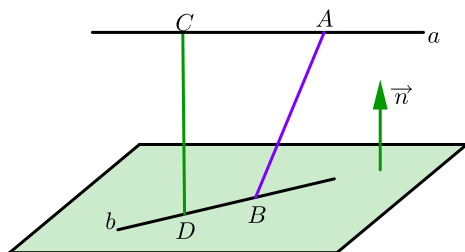
$$\text{两异面直线 } a \text{ 与 } b \text{ 的距离 } d = |\vec{CD}| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

1. 异面直线间距离

如图所示，**CD 是异面直线 a 与 b 的公垂线段**，线段 CD 即为异面直线间的距离

2. 求解过程

A、B 分别为 a、b 上的两点，令 $\vec{n} \perp a$ ， $\vec{n} \perp b$ ，则 $\vec{n} // \vec{CD}$



$$\because \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB},$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n} = \vec{AC} \cdot \vec{n} + \vec{CD} \cdot \vec{n} + \vec{DB} \cdot \vec{n},$$

$$\text{即 } \vec{AB} \cdot \vec{n} = \vec{CD} \cdot \vec{n}.$$

3. 异面直线距离的向量公式

$$\text{两异面直线 } a \text{ 与 } b \text{ 的距离 } d = |\vec{CD}| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$



线面距离的求法

1. 当**直线与平面平行**时，才能求线面距离

2. 线面距离的求法

此时直线上任一点到平面的距离相等，且等于直线到平面的距离

故可通过**求点面距离来求线面距离**。

