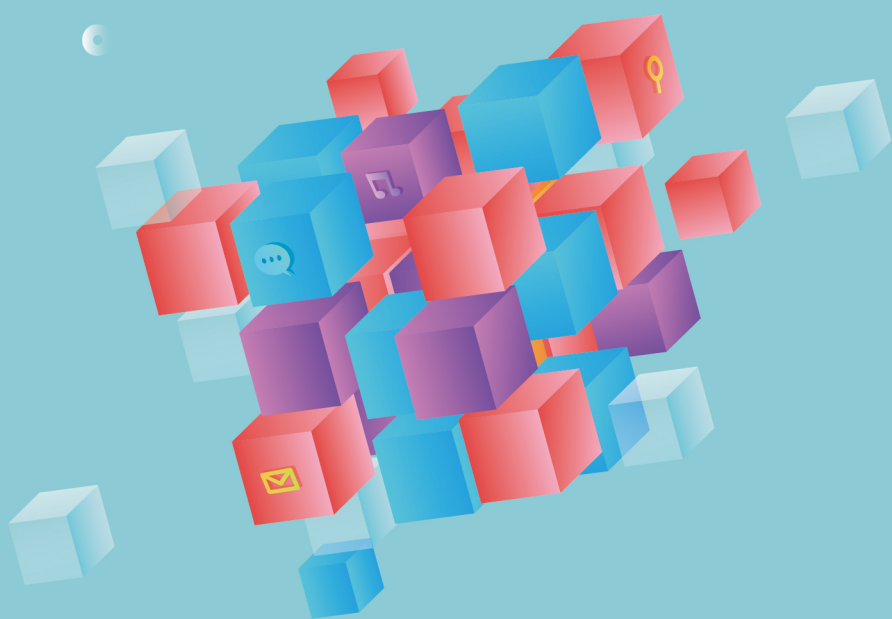


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：严立

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

学习此模块，首先希望同学们能够掌握直线的倾斜角和斜率的概念和计算公式，并了解直线的倾斜角和斜率之间的关系。

而在这后，同学们将会学到直线方程的五种形式以及他们的适用条件，并尝试选择最恰当的直线方程形式求解直线的方程。

目 录

第 1 讲 直线的方程 1..... 01

- 知 识 点 1 直线的倾斜角与斜率
- 知 识 点 2 直线的方程
- 知 识 点 3 两条直线的位置关系

第 2 讲 直线的方程 2.....09

- 知 识 点 1 距离公式
- 知 识 点 2 对称问题



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

直线的方程 1





直线的倾斜角与斜率

1. 倾斜角

定义：x 轴正向与直线向上的方向所成的角叫做这条直线的倾斜角。我们规定，与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为零度角。倾斜角一般用 θ 表示，且 $\theta \in [0, \pi)$ 。

2. 斜率

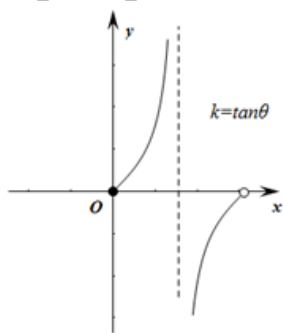
直线的斜率公式： $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$

直线斜率 k 越大，反映直线相对于 x 轴倾斜程度越大；反之，直线的斜率 k 越小，反映直线相对于 x 轴倾斜程度越小。

除去垂直于 x 轴的直线外，只要知道直线上两个不同点的坐标，有 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$ 就可以算出这条直线的斜率。

3. 倾斜角与斜率的关系

斜率与倾斜角的关系： $k = \tan \theta (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi))$ 。



(1) 当_____时，直线平行于 x 轴或与 x 轴重合。

(2) 当 $k > 0$ 时，直线的倾斜角为_____； k 值越大，直线的倾斜角也随着_____。

(3) 当 $k < 0$ 时，直线的倾斜角为_____； k 值越大，直线的倾斜角也随着_____。

(4) 垂直于 x 轴的直线的倾斜角等于 90° ，此时直线的斜率_____。

1 经过点 $M(-2, m)$ 、 $N(m, 4)$ 的直线的斜率等于 1，则 m 的值为_____。

2 若 A, B 两点的纵坐标相等，则直线 AB 的倾斜角为()。

- A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

3 已知直线 l 的倾斜角为 30° ，则直线 l 的斜率为()。

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

4 直线 $ax + my - 2a = 0 (m \neq 0)$ 过点 $(1, 1)$ ，则该直线的倾斜角 α 为_____。

5 直线 $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ 的斜率为_____，倾斜角为_____。



精进不休 日新月异

6 已知两点 $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$, 过点 $P(1, 0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点.

- (1) 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.
- (2) 求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.



直线的方程

1. 直线方程的五种形式

- (1) 点斜式方程: $y - y_0 = k(x - x_0)$;
- (2) 斜截式方程: $y = kx + b$;
- (3) 两点式方程: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$;
- (4) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
- (5) 一般式: $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为零)

2. 五种形式的区别和联系

名称	方程的形式	常数的几何意义	适用范围
点斜式	$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0) 是直线上一定点, k 是斜率	不垂直于 x 轴
斜截式	$y = kx + b$	k 是斜率, b 是直线在 y 轴上的截距	不垂直于 x 轴
两点式	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是直线上两定点	不垂直于 x 轴和 y 轴
截距式	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a 是直线在 x 轴上的非零截距, b 是直线在 y 轴上的非零截距。	不垂直于 x 轴和 y 轴, 且不过原点
一般式	$Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)	A, B, C 为系数	任意位置的直线



两点式

- 7 经过两点 $(3, 9)$ 、 $(-1, 1)$ 的直线在 x 轴上的截距为 ().

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

- 8 写出满足下列条件的直线的方程.

经过点 $A(-1, 8)$, $B(4, -2)$.



截距式

- 9 在 x 轴、 y 轴上的截距分别是 2、-3 的直线方程为 ().

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ B. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ C. $\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$ D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$

- 10 已知直线 l 在 x 轴上的截距是 -5, 在 y 轴上的截距是 6, 则直线 l 的方程是 ().

A. $6x - 5y - 30 = 0$ B. $6x + 5y - 30 = 0$ C. $6x - 5y + 30 = 0$ D. $6x + 5y + 30 = 0$

- 11 过点 $(5, 2)$, 且在 y 轴上的截距是在 x 轴上的截距的 2 倍的直线方程是 ().

A. $2x + y - 12 = 0$ B. $2x + y - 12 = 0$ 或 $2x - 5y = 0$
C. $x - 2y - 1 = 0$ D. $x - 2y - 1 = 0$ 或 $2x - 5y = 0$



点斜式

- 12 写出满足下列条件的直线的方程.

斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 经过点 $A(8, -2)$.

- 13 已知直线 $2x + (t - 2)y + 3 - 2t = 0$, 分别根据下列条件, 求 t 的值.

(1) 过点 $(1, 1)$.

(2) 直线在 y 轴上的截距为 -3.



定点问题

- 14 任取 $k \in \mathbf{R}$, 直线 $(1+4k)x - (2-3k)y - (3+12k) = 0$ 恒过一定点 P , 若直线 $mx + y - 6 = 0$ 也过定点 P , 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 15 直线 $l: kx - y + 2 - 2k = 0$ 过定点 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 16 不论 k 为何实数, 直线 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$ 恒通过一个定点, 这个定点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



两条直线的位置关系

1. 直线方程为一般式:

两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

(1) 两条直线相交、平行与重合条件:

- ① 相交的条件: $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ 或 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$,
- ② 平行的条件: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $B_1C_2 - C_1B_2 \neq 0$ 或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$,
- ③ 重合的条件: $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ ($\lambda \neq 0$) 或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

(2) 两条直线垂直的条件: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

2. 直线方程为斜截式:

两条直线 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$

(1) 两条直线相交、平行与重合条件:

- ① 相交的条件: $k_1 \neq k_2$;
- ② 平行的条件: $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$;
- ③ 重合的条件: $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

(2) 垂直的条件: $k_1k_2 = -1$.



平行关系

- 17 直线 l_1 的方程为 $3x + 2y - 2 = 0$, 直线 l_2 的方程为 $(2m-1)x + my + 1 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$ 则实数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 18 若直线 $(m+2)x - y - 3 = 0$ 与直线 $(3m-2)x - y + 1 = 0$ 平行, 则实数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 19 若直线 $l_1: ax + 2y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: 3x - y - 2 = 0$ 平行, 则 a 的值为 ().
- A. -3 B. -6 C. 6 D. 3



- 20 已知直线 $l_1: (3+m)x + 4y = 5 - 3m$ 与直线 $l_2: 2x + (5+m)y = 8$ 平行, 则实数 m 的值为 ().
- A. -7 B. -1 C. -1 或 -7 D. $\frac{13}{3}$



垂直关系

- 21 若两条直线 $(a^2 + a - 6)x + 12y - 3 = 0$ 与 $(a - 1)x - (a - 2)y + 4 - a = 0$ 互相垂直, 则 a 的值等于 ().
- A. 3 B. 3 或 5 C. 3 或 -5 或 2 D. -5
- 22 过点 $(1, 0)$ 且与直线 $x - 2y - 2 = 0$ 垂直的直线方程为 ().
- A. $x - 2y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x + y - 2 = 0$ D. $x + 2y - 1 = 0$
- 23 已知直线 l 的倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$, 直线 l_1 经过点 $A(3, 2)$ 、 $B(a, -1)$, 且 l_1 与 l 垂直, 直线 $l_2: 2x + by + 1 = 0$ 与直线 l_1 平行, 则 $a + b$ 等于 ().
- A. -4 B. -2 C. 0 D. 2



条件分析

- 24 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 的坐标分别为 $(1, 2), (-5, -3), (4, 0)$, 则 BC 边上的高 AH 所在的直线方程为 _____.
- 25 已知点 $A(3, 1), B(1, 5)$, 则线段 AB 的垂直平分线的方程是 ().
- A. $x - 2y + 4 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$ C. $x + 2y - 8 = 0$ D. $2x + y - 7 = 0$
- 26 已知平行四边形相邻两边所在的直线方程是 $l_1: x - 2y + 1 = 0$ 和 $l_2: 3x - y - 2 = 0$, 此四边形两条对角线的交点是 $P(2, 3)$, 则平行四边形另外两边所在直线的方程是 ().
- A. $2x - y + 7 = 0$ 和 $x - 3y - 4 = 0$ B. $x - 2y + 7 = 0$ 和 $3x - y - 4 = 0$
- C. $x - 2y + 7 = 0$ 和 $x - 3y - 4 = 0$ D. $2x - y + 7 = 0$ 和 $3x - y - 4 = 0$



综合问题

- 27 设两直线 $l_1: (3+m)x + 4y = 5 - 3m$, $l_2: 2x + (5+m)y = 8$, 若 $l_1 // l_2$, 则 m 的值为 _____; 若 $l_1 \perp l_2$, 则 m 的值为 _____.
- 28 已知直线 l_1 经过点 $(0, -2), (\sqrt{3}, 1)$.
- (1) 求直线 l_1 的方程.
- (2) 若直线 $l_2: x + ay + 2 = 0$ 与 l_1 互相垂直, 求直线 l_2 与两坐标轴围成三角形的面积.



29 已知直线过点 $P(2, 1)$.

- (1) 若直线与 $3x - 2y + 4 = 0$ 平行，求直线的方程.
- (2) 若直线与 $3x - 2y + 4 = 0$ 垂直，求直线的方程.
- (3) 若直线在两坐标轴上的截距相等，求直线的方程.



第 2 讲

直线的方程 2

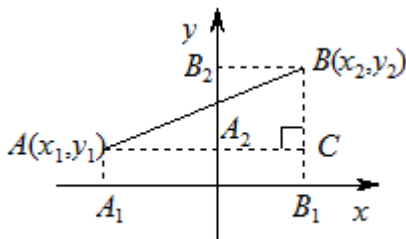




距离公式

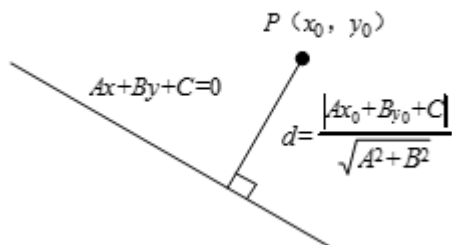
1. 两点间距离公式

已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



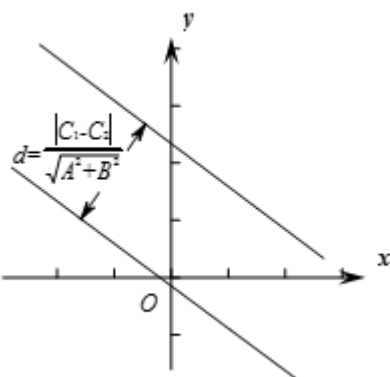
2. 点到直线距离公式

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



3. 两条平行线之间的距离

$l_1: Ax + By + C_1 = 0$, $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ 之间的距离为 d , 则 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



两点间距离

- 1 已知点 $A(5, 12)$, 在 x 轴上求一点 P , 使点 P 与点 A 的距离等于 13, 则满足条件的点 P 为 _____.



- 2** 两条直线 $l_1: 3ax - y - 2 = 0$ 和 $l_2: (2a - 1)x + 5ay - 1 = 0$ 分别过定点 A, B , 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.



点到直线距离

- 3 已知点 $P(4, a)$ 到直线 $4x - 3y = 1$ 的距离不大于 3, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $[0, 10]$ B. $(0, 10)$
C. $[\frac{1}{3}, \frac{3}{13}]$ D. $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$
- 4 P 点在直线 $3x + y - 5 = 0$ 上, 且 P 到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 P 点坐标为 ().
- A. $(1, 2)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, 2)$ 或 $(2, -1)$ D. $(2, 1)$ 或 $(-1, 2)$
- 5 已知点 $P(2, -1)$.
求过点 P 且与原点距离最大的直线 l 的方程, 最大距离是多少?

- 6** 解答下列各题:

求垂直与直线 $x + 3y - 5 = 0$, 且与点 $P(-1, 0)$ 的距离是 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ 的直线的方程.



包罗万象 举一千从

- 7 已知点 $P_1(2, 3)$, $P_2(-4, 5)$, $A(-1, 2)$, 求过点 A 且与点 P_1 、 P_2 距离相等的直线方程.
- 8 已知直线 l 过点 $P(5, 10)$, 且原点到它的距离为 5, 求直线 l 的方程.



两条平行线之间的距离

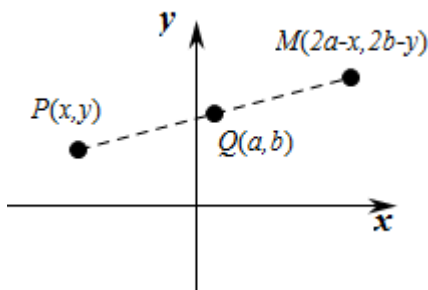
- 9 求与直线 $l_1: 3x - 4y - 20 = 0$ 平行且距离为 3 的直线方程.
- 10 若直线 $3x + y - 3 = 0$ 与直线 $6x + my + 1 = 0$ 平行, 则它们之间的距离为 ().
 A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{10}}{20}$
- 11 已知直线 $l_1: 3x + 4y + 4 = 0$, $l_2: 6x + 8y - 7 = 0$, 则 l_1, l_2 之间的距离为 ____.
- 12 已知直线 $l_1: x + (a - 2)y + 3 = 0$, 直线 $l_2: x + 2y + 1 = 0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $a =$ ____; 若 $l_1 // l_2$, 则两平行直线间的距离为 ____.
- 13 已知直线 $l_1: x + 2y + t^2 = 0$ 和直线 $l_2: 2x + 4y + 2t - 3 = 0$, 则 l_1 与 l_2 间的距离最短时 t 的值为 ().
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1
- 14 回答下列问题:
 (1) 求平行于直线 $l_1: 3x + 4y - 12 = 0$ 与 l_1 的距离为 7 的直线方程.
 (2) 过 $B(3, 4)$ 作直线 l , 使点 $A(1, 1)$ 到 l 的距离等于 2, 求此直线 l 的方程.



对称问题

1. 点关于点的对称点

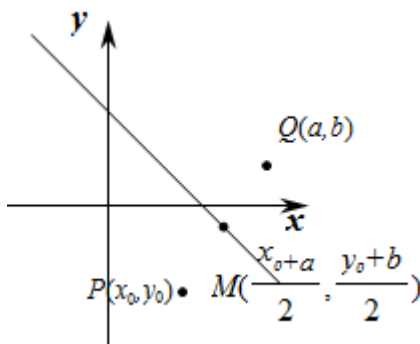
$P(x', y')$ 关于点 $Q(x_0, y_0)$ 的对称点为 $(2x_0 - x', 2y_0 - y')$





2. 求点关于直线的对称点

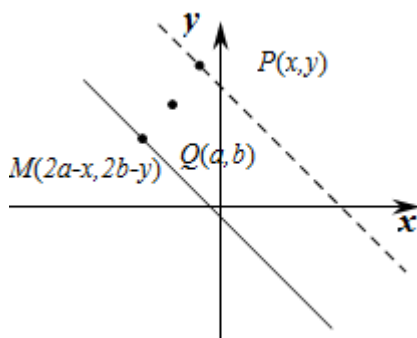
设 $P(x_0, y_0)$, $l: Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$, 设 P 关于 l 的对称点的坐标 $Q(x, y)$, 则 l 是 PQ 的垂直平分线, 即 $PQ \perp l$ 且 PQ 的中点在 l 上, 解方程组
$$\begin{cases} \frac{y-y_0}{x-x_0} \cdot (-\frac{A}{B}) = -1 \\ A \cdot \frac{x+x_0}{2} + B \cdot \frac{y+y_0}{2} + C = 0 \end{cases}$$
 可得 Q 点坐标.



3. 直线关于点的对称直线

方法一: 求一条直线关于点 $A(a, b)$ 的对称直线方程时可在该直线上取某个两个特殊点, 再求它们关于点 A 的对称点坐标, 然后利用两点式求其直线方程;

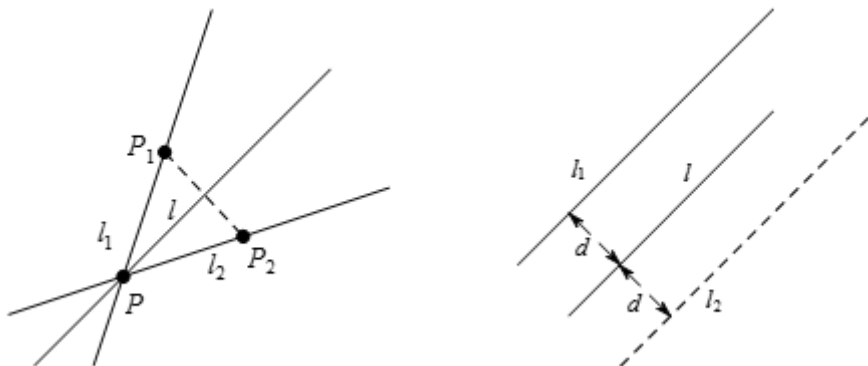
方法二: (一般性方法) 可设所求的直线上任一点坐标为 (x, y) , 再求它关于 $A(a, b)$ 的对称点坐标, 而它的对称点在已知直线上, 将其代入已知直线方程, 便可得到关于 x, y 的方程, 即为所求的直线方程.





4. 直线关于直线的对称直线

此类问题一般转化为关于直线的对称问题来解决，若已知直线 l_1 与对称轴 l 相交，则交点必在与 l_1 对称的直线 l_2 上，然后在求出 l_1 上任一个已知点 P_1 关于对称轴 l 对称的点 P_2 ，那么经过交点及点 P_2 得直线就是 l_2 ；若已知直线 l_1 与对称轴 l 平行，则与 l_1 对称的直线和 l_1 到直线 l 的距离相等，由平行直线系和两条平行线间的距离，即可求出 l_1 的对称直线。



点关于点对称点

- 19 点 $M(4, m)$ 关于点 $N(n, -3)$ 的对称点为 $P(6, -9)$ ，则 () .
 A. $m = -3, n = 10$ B. $m = 3, n = 10$ C. $m = -3, n = 5$ D. $m = 3, n = 5$

点关于直线的对称点

- 20 若点 $P(3, 4)$ 和点 $Q(a, b)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 对称，则 () .
 A. $a = 1, b = -2$ B. $a = 2, b = -1$ C. $a = 4, b = 3$ D. $a = 5, b = 2$
- 21 直线 $l: x + 2y - 2 = 0$ ，则点 $P(-2, -1)$ 关于直线 l 的对称点的坐标为 _____ .

直线关于点的对称直线

- 15 与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线是 () .
 A. $3x - 2y - 6 = 0$ B. $2x + 3y + 7 = 0$ C. $3x - 2y - 12 = 0$ D. $2x + 3y + 8 = 0$

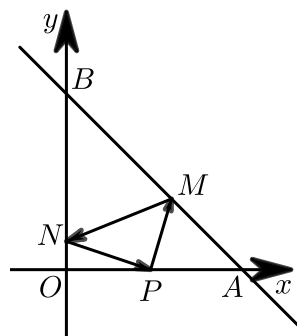
直线关于直线的对称直线

- 16 直线 $x - 2y + 1 = 0$ 关于直线 $x = 1$ 对称的直线方程为 () .
 A. $x + y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x + y - 3 = 0$ D. $x + 2y - 3 = 0$
- 17 直线 $l: x - y - 2 = 0$ 关于直线 $3x - y + 3 = 0$ 对称的直线方程是 _____ .
- 18 直线 $ax + y + 3a - 1 = 0$ 恒过定点 M ，则直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于 M 点对称的直线方程为 () .
 A. $2x + 3y - 12 = 0$ B. $2x + 3y + 12 = 0$ C. $2x - 3y + 12 = 0$ D. $2x - 3y - 12 = 0$



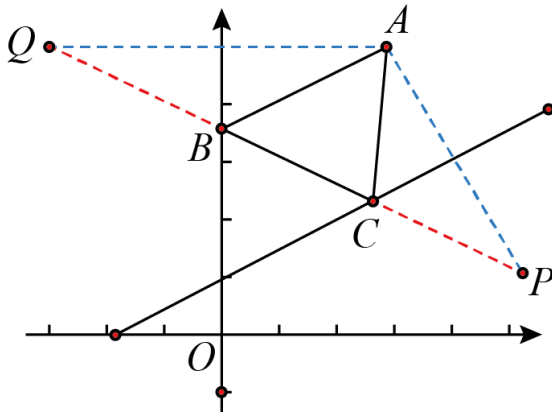
精进不休 日新月异

- 23 已知直线 $l: x - y + 3 = 0$ ，一束光线从点 $A(1, 2)$ 处射向 x 轴上一点 B ，又从 B 点反射到 l 上的一点 C ，最后从 C 点反射回 A 点，则直线 BC 的方程为 _____.
- 24 已知入射光线经过点 $M(-3, 4)$ ，被直线 $l: x - y + 3 = 0$ 反射，反射光线经过点 $N(2, 6)$ ，则反射光线所在直线的方程为 _____.
- 25 如图，已知 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ，从点 $P(2, 0)$ 射出的光线经直线 AB 反射后再射到直线 OB 上，最后经直线 OB 反射后又回到 P 点，则光线所经过的路程是 ().



- A. $2\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{3}$ C. 6 D. $2\sqrt{10}$

- 22 已知点 $A(3, 5)$ 及直线 $l: x - 2y + 2 = 0$ ， B 为 y 轴上的动点， C 为 l 上的动点，求 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为 _____.



- 26 在直线 $l: 3x - y - 1 = 0$ 上求点 Q ，使得 Q 到 $A(4, 1)$ 和 $B(3, 4)$ 的距离之和最小，并求这个最小值.