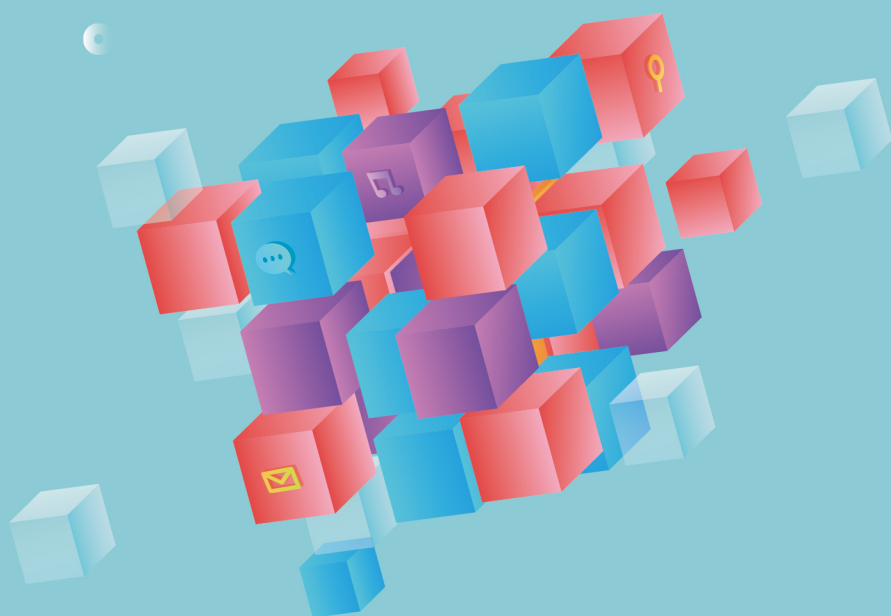


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

在上一模块，我们已经对椭圆、双曲线、抛物线的定义及基础性质有了更深的了解，而在这一模块中，我们将会深入学习直线与圆锥曲线的位置关系的判断方法及它们结合考察的综合性问题。而此处题型主要分成选填题和解答题两部分，而在解答题中，熟练掌握圆锥曲线中的弦长公式是我们十分重视的。

目 录

第 1 讲 圆锥曲线综合（选填题） 01

- 知 识 点 1 双曲线与椭圆定义标准方程的比较
- 知 识 点 2 抛物线基本性质复习
- 知 识 点 3 圆锥曲线的综合性问题

第 2 讲 直线与圆锥曲线的位置关系（选填题）07

- 知 识 点 1 直线与圆锥曲线的位置关系
- 知 识 点 2 圆锥曲线的弦
- 知 识 点 3 与焦点相关的三角形问题
- 知 识 点 4 双曲线与直线
- 知 识 点 5 椭圆与直线
- 知 识 点 6 抛物线与直线

第 3 讲 直线与椭圆的位置关系（解答）15

- 知 识 点 1 圆锥曲线的弦
- 知 识 点 2 向量点乘
- 知 识 点 3 三角形面积问题
- 知 识 点 4 定值定点问题



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

圆锥曲线综合（选填题）





双曲线与椭圆定义标准方程的比较

	椭圆	双曲线
定义		
标准方程		
根据标准方程确定 a, b 的方法	以大小分 a, b	以正负分 a, b
a, b, c 的关系		

双曲线的渐近线

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 _____ ①

双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 _____ ②



抛物线基本性质复习

标准方程	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	$y^2 = -2px$ ($p > 0$)	$x^2 = 2py$ ($p > 0$)	$x^2 = -2py$ ($p > 0$)
图形				
焦点				
准线方程				
离心率				
焦准距				
通径长				
$M(x_0, y_0)$ 的焦半径				



圆锥曲线的综合性问题



双曲线与抛物线

1 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是双曲线 $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点，则 $p =$ _____ .

- 2 已知双曲线的一个焦点是抛物线 $y^2 = 36x$ 的焦点, 且双曲线的虚轴长为 4, 则此双曲线的标准方程是 ().
- A. $\frac{x^2}{77} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{y^2}{77} - \frac{x^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{65} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{65} - \frac{x^2}{16} = 1$
- 3 已知双曲线 $my^2 - x^2 = 1 (m \in \mathbf{R})$ 与抛物线 $x^2 = 8y$ 有相同的焦点, 则该双曲线的渐近线方程为 ().
- A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm 3x$ D. $y = \pm\frac{1}{3}x$
- 4 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 8\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{16} = 1$
- 5 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 抛物线 $y^2 = 12x$ 的准线过双曲线的一个焦点, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ B. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$ D. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 6 双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (mn \neq 0)$ 的离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 ().
- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
- 7 若双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{16y^2}{p^2} = 1 (p > 0)$ 的左焦点在抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线上, 则 $p =$ _____.
- 8 已知抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合, 且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$ C. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
- 9 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 共焦点, 双曲线与抛物线的一公共点到抛物线准线的距离为 2. 双曲线的离心率为 e , 则 $2e - b^2$ 的值是 ().
- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $2\sqrt{2} - 2$ C. $4 - 2\sqrt{2}$ D. 4
- 10 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 有一个共同的焦点 F , 点 M 是双曲线与抛物线的一个交点, 若 $|MF| = 5$, 则此双曲线的离心率等于 _____.

- 11 双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2$ 有一个公共焦点 F , 双曲线上过点 F 且垂直于 y 轴的弦长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则双曲线的离心率为 ().
- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{3}$
- 12 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线分别交于 O 、 A 、 B 三点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p =$ ().
- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3
- 13 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 若 l 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的方程为 ().
- A. $x^2 - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$



椭圆与双曲线

- 14 已知双曲线 $x^2 + ny^2 = 1 (n \in \mathbf{R})$ 与椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 有相同的焦点, 则该双曲线的渐近线方程为 ____.
- 15 已知双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ 有相同的焦点, 且经过点 $(\sqrt{15}, 4)$, 则双曲线的方程为 ____.
- 16 已知椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且它的焦点与双曲线 $x^2 - 2y^2 = 4$ 的焦点重合, 则椭圆 C 的方程为 ____.
- 17 已知椭圆 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 公共焦点为 F_1, F_2 , 点 P 为两曲线的一个公共交点, 且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 则双曲线的虚轴长为 ____.
- 18 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{m} = 1$ 和双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的公共焦点分别为 F_1, F_2 , P 为这两条曲线的一个交点, 则 $\cos \angle F_1PF_2$ 的值为 ().
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$
- 19 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (m > 1)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{n^2} - y^2 = 1 (n > 0)$ 的焦点重合, e_1, e_2 , 分别为 C_1, C_2 的离心率, 则 ().
- A. $m < n$ 且 $e_1e_2 < 1$ B. $m > n$ 且 $e_1e_2 < 1$ C. $m > n$ 且 $e_1e_2 > 1$ D. $m < n$ 且 $e_1e_2 > 1$



椭圆与抛物线

- 20 若抛物线 $x^2 = 2py$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的下焦点重合，则 p 的值为 ().
A. 4 B. 2 C. -4 D. -2
- 21 已知抛物线 $y^2 = x$ 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点，则椭圆的离心率为 ().
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{37}}{37}$
- 22 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点恰好是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点 F ，且两条曲线交点连线也过焦点 F ，则该椭圆的离心率为 ____ .

第 2 讲

直线与圆锥曲线的位置关系 (选填题)





直线与圆锥曲线的位置关系



直线与椭圆的位置关系

1. 直线与椭圆的位置关系

可分为：相交、相切、相离.

2. 判定条件

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 椭圆方程 $C: f(x, y) = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases},$$

消去 y (或消去 x) 得: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ **相交**, 直线与椭圆有 _____ 交点;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ **相离**, 直线与椭圆 _____ 交点;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ **相切**, 直线与椭圆有 _____ 交点.

1

已知直线 $y = kx + 1$, 椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$, 试判断直线与椭圆的位置关系 ().

A. 相切

B. 相离

C. 相交

D. 相切或相交



直线与双曲线的位置关系

1. 直线与双曲线的位置关系

相交、相切、相离;

2. 特别注意

对于双曲线来说, **平行于渐近线的直线与双曲线只有一个交点, 但并不相切**;

3. 判定条件

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 双曲线 $C: f(x, y) = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 y (或消去 x) 得: $ax^2 + bx + c = 0$.

①若 $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$,

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ **相交**, 直线与双曲线有 _____ 交点;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ **相离**, 直线与双曲线 _____ 交点;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ **相切**. 直线与双曲线有 _____ 交点.

②若 $a = 0$, 得到一个一次方程, 与双曲线相交, 有 _____ 交点, l 与双曲线的渐近线平行.

2

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $y = 2x$ 有交点, 则双曲线离心率的取值范围为 ().

A. $(1, \sqrt{5})$

B. $(1, \sqrt{5}]$

C. $(\sqrt{5}, +\infty)$

D. $[\sqrt{5}, +\infty)$

- 3 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 过右焦点且倾斜角为 45° 的直线与双曲线右支有两个交点, 则双曲线的离心率 e 的取值范围是 ().
- A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ D. $(1, \sqrt{2})$



直线与抛物线的位置关系

1. 直线与抛物线的位置关系

相交、相切、相离.

2. 特别注意

对于抛物线来说, 平行于对称轴的直线与抛物线相交于一点, 但并不是相切;

3. 判定条件

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 抛物线 $C: f(x, y) = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 y (或消去 x) 得: $ax^2 + bx + c = 0$.

①若 $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$,

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ **相交**, 直线与抛物线有 交点;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ **相离**, 直线与抛物线 交点;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ **相切**. 直线与双曲线只有 交点.

②若 $a = 0$, 得到一个一次方程, 与抛物线相交, 有 交点, l **与抛物线的对称轴平行**.

- 4 直线 $y = kx + 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 有且只有一个交点, 则 k 为 .



圆锥曲线的弦

1. 弦的定义

连结圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的**弦**.

2. 弦长的求法

①将直线方程与圆锥曲线的方程联立, 求出两交点的坐标,

然后运用两点间的距离公式来求;

(但是这个办法一般用得比较少噢, 一是因为过程比较麻烦, 二是前面的理由就够了啦)

②利用弦长公式

如果直线的斜率为 k , 被圆锥曲线截得弦 AB 两端点坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

$$\text{则弦长公式为 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} |y_1 - y_2|.$$

两根差公式:

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程: $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\text{则 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0).$$

(这个方法多用于求椭圆解答题里, 一定要特别引起重视哈!)

3. 特别注意

对于抛物线来说, 假设焦点弦与抛物线的交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

则**焦点弦长** $AB = AF + BF = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) + \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = x_1 + x_2 + p$;

特别地, **通径**的长度为 $2p$, 仍然是**所有焦点弦里面最短的**

(它的证明我们留在后面去完成)

- 5 过椭圆 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的右焦点且倾斜角为 45° 的弦 AB 的长为 ().
A. 5 B. 6 C. $\frac{90}{17}$ D. 7
- 6 顶点在原点, 焦点在 x 轴上的抛物线, 截直线 $2x - y + 1 = 0$ 所得弦长为 $\sqrt{15}$, 则抛物线方程为 ____.



与焦点相关的三角形问题



椭圆周长问题

- 7 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与椭圆交于 A, B 两点 (点 A, B 异于椭圆长轴端点), 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ().
A. 10 B. 20 C. 8 D. 16
- 8 若椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F , 且与直线 $l: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ 交于 P, Q 两点, 则 $\triangle PQF$ 的周长为 ____.
- 9 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ().
A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$



双曲线周长问题

- 10 如果 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点, AB 是双曲线左支上过点 F_1 的弦, 且 $|AB| = 6$, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长是 ____.
- 11 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点, AB 是过点 F_1 的一条弦 (A, B 均在双曲线的左支上), 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 30, 则 $|AB| =$ ____.



面积问题

- 12 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, $|PF_1| = 3$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ().
- A. 6 B. $4\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$
- 13 过点 $P(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 椭圆 E 与 x 轴正半轴交于点 A , 则三角形 AMN 的面积的最大值为 _____.



双曲线与直线

- 14 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点. 若在双曲线右支上存在点 P , 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长, 则该双曲线的渐近线方程为 ().
- A. $3x \pm 4y = 0$ B. $3x \pm 5y = 0$ C. $4x \pm 3y = 0$ D. $5x \pm 4y = 0$
- 15 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, F_1 为其左焦点, 直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$, 若过 F_1 和 $(0, -b)$ 的直线与 l 平行, 则双曲线的离心率为 ().
- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5
- 16 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, A 为 C 的左顶点, B 为 C 上的点, 且 BF 垂直于 x 轴, 若直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 C 的离心率为 ().
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $\sqrt{5}$
- 17 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 $\sqrt{3}$, 左右焦点分别是 F_1, F_2 , 过 F_2 且与 x 轴垂直的直线交双曲线于 A, B 两点, 则其渐近线方程是 _____, $\tan \angle AF_1F_2 =$ _____.
- 18 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 C 的一个焦点到 l 的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 _____.



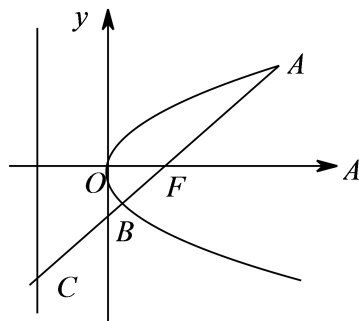
椭圆与直线

- 19 已知直线 $2\sqrt{2}x - y + 4\sqrt{2} = 0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F_1 ，且与椭圆在第二象限的交点为 M ，与 y 轴的交点为 N ， F_2 是椭圆的右焦点，且 $|MN| = |MF_2|$ ，则椭圆的方程为 () .
- A. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
- 20 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，若 $AB \perp AF_2$ ， $|AB| : |AF_2| = 3 : 4$ ，则椭圆的离心率为 _____ .
- 21 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A ，右焦点为 F ，直线 AF 与 C 交于点 B ，若 $|AF| = 2|FB|$ ，则 C 的离心率为 () .
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 22 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， A 是椭圆上一点， $AF_2 \perp F_1F_2$ ，若原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$ ，则该椭圆的离心率为 _____ .
- 23 已知椭圆 $x^2 + 4y^2 = 12$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，线段 PF_1 的中点在 y 轴上，则 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 () .
- A. 3 倍 B. 4 倍 C. 5 倍 D. 7 倍



抛物线与直线

- 24 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线交抛物线于 A, B 两点，若线段 AB 的长为 8，则 $p =$ _____ .
- 25 如图，过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于点 A, B ，交其准线 l 于点 C ，若 $|BC| = 2|BF|$ ，且 $|AF| = 3$ ，则此抛物线的方程为 _____ .



- 26 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴上方)， l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN \perp l$ ，则 M 到直线 NF 的距离为 () .
 A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$
- 27 直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，且与抛物线 C 交于 A, B 两点，若 AB 中点的纵坐标为 2，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ，直线 l 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 28 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，点 $K(-1, 0)$ ，过 K 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交抛物线于 M, N 两点，若 $3\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KN}$ ，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 29 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点， M 为抛物线 C 的准线与 x 轴的交点，若 $\tan \angle AMB = 2\sqrt{2}$ ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

第 3 讲

直线与椭圆的位置关系 (解答)





圆锥曲线的弦

1. 弦的定义

连结圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的弦.

2. 弦长公式

如果直线的斜率为 k , 被圆锥曲线截得弦 AB 两端点坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

则**弦长公式**为 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} |y_1 - y_2|$.

3. 两根差公式

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程: $ax^2 + bx + c = 0$,

则 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0)$.

4. 两根差表示的弦长公式

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|}$$

$$|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



定直线问题

1 已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $P\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 已知斜率为 1 的直线 l 过椭圆的右焦点 F 交椭圆于 A, B 两点, 求弦 AB 的长.



根据弦长求解直线方程

2 已知椭圆的两焦点为 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求此椭圆的方程.

(2) 设直线 $l: y = x + m$, 若 l 与此椭圆相交于 P, Q 两点, 且 $|PQ|$ 等于椭圆的短轴长, 求 m 的值.



向量点乘



求解向量点乘的具体数值

- 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(2\sqrt{2}, 0)$, A 是椭圆短轴的一个端点, 直线 AF 与椭圆另一交点为 B , 且 $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{BF}$,

(1) 求椭圆方程.

(2) 若斜率为 1 的直线 l 交椭圆于 C, D , 且 CD 为底边的等腰三角形的顶点为 $P(-3, 2)$, 求 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的值.



求解向量点乘的取值范围

4 已知点 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求：椭圆的方程.

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A 、 B ，已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

①求： $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}$ 的取值范围.

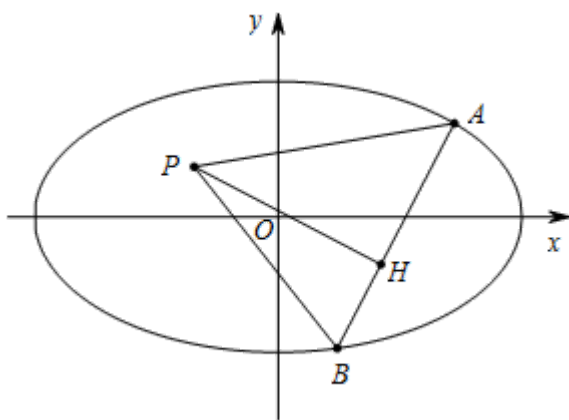
②若 $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ，求：直线 l 的斜率.



三角形面积问题

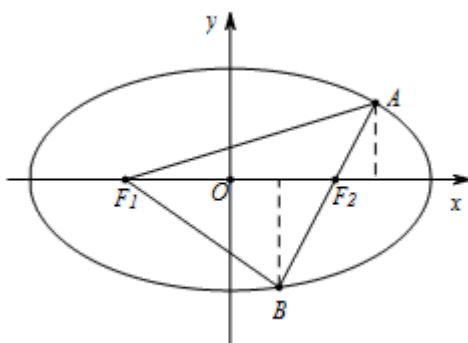
1. 一般三角形面积求解

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d.$$



2. 焦点三角形面积求解

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c |y_1 - y_2|.$$



一般三角形面积求解

- 5 已知 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点, 上顶点 B 的坐标是 $(0, \sqrt{2})$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) O 为坐标原点, 直线 l 过点 $(-2, 0)$ 且与椭圆相交于 P, Q 两点.

若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 求直线 l 的方程.



焦点三角形面积

6 已知椭圆的中心在坐标原点 O ，长轴长为 $2\sqrt{2}$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 P ， Q 两点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 时，求 $\triangle POQ$ 的面积.



三角形面积取值范围

- 7 在平面 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.



8 已知点 $A(0, 2)$ ，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， F 是椭圆的焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程；

(2) 设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程.

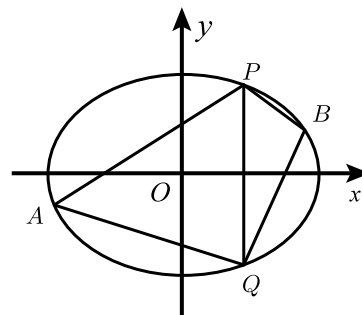


定值定点问题



定值问题

9 已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，短轴长为 $4\sqrt{3}$.



(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 直线 $x = 2$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, A, B 是椭圆 C 上位于直线 PQ 两侧的动点, 且直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

①求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.

②设直线 PA 的斜率为 k_1 , 直线 PB 的斜率为 k_2 , 判断 $k_1 + k_2$ 的值是否为常数, 并说明理由.



定点问题

10 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 已知定点 $E(1, 0)$ ，若直线 $y = kx - 2 (k \neq 0)$ 与椭圆 C 相交于 M, N 两点，试判断是否存在实数 k ，使以 MN 为直径的圆过定点 E ？若存在求出这个 k 值，若不存在说明理由。