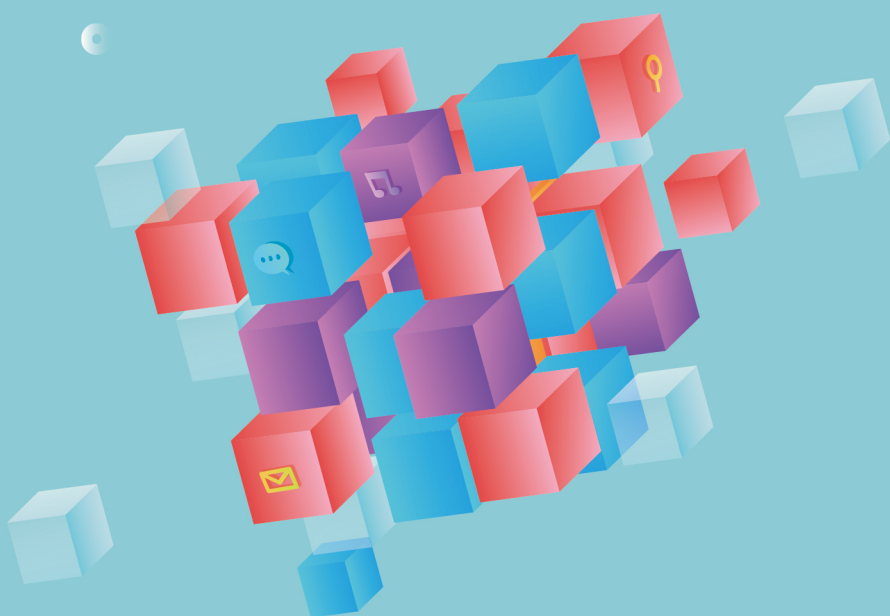


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

平面解析几何是一种借助于解析式进行图形研究的几何学分支，其通常使用二维的平面直角坐标系研究直线、圆、圆锥曲线等多种一般平面曲线，是高中数学在几何学知识体系的重要体现，其不同于初中数学的几何研究，将图形、曲线与坐标轴进行了更加系统的融合，打通了代数与几何间的关系。平面解析几何包括直线、圆、圆锥曲线、坐标系与参数方程等章节。

目 录

第 1 讲 椭圆的概念与性质..... 01

- 知 识 点 1 椭圆的基本概念
- 知 识 点 2 椭圆的基础性质
- 知 识 点 3 椭圆性质的简单扩展

第 2 讲 双曲线的概念与性质.....07

- 知 识 点 1 双曲线的基本概念
- 知 识 点 2 双曲线的基础性质
- 知 识 点 3 双曲线性质的简单扩展

第 3 讲 抛物线的概念与性质.....13

- 知 识 点 1 抛物线的基本概念
- 知 识 点 2 抛物线的基础性质
- 知 识 点 3 抛物线性质的简单扩展



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

椭圆的概念与性质





椭圆的基本概念

1. 椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做**椭圆**。

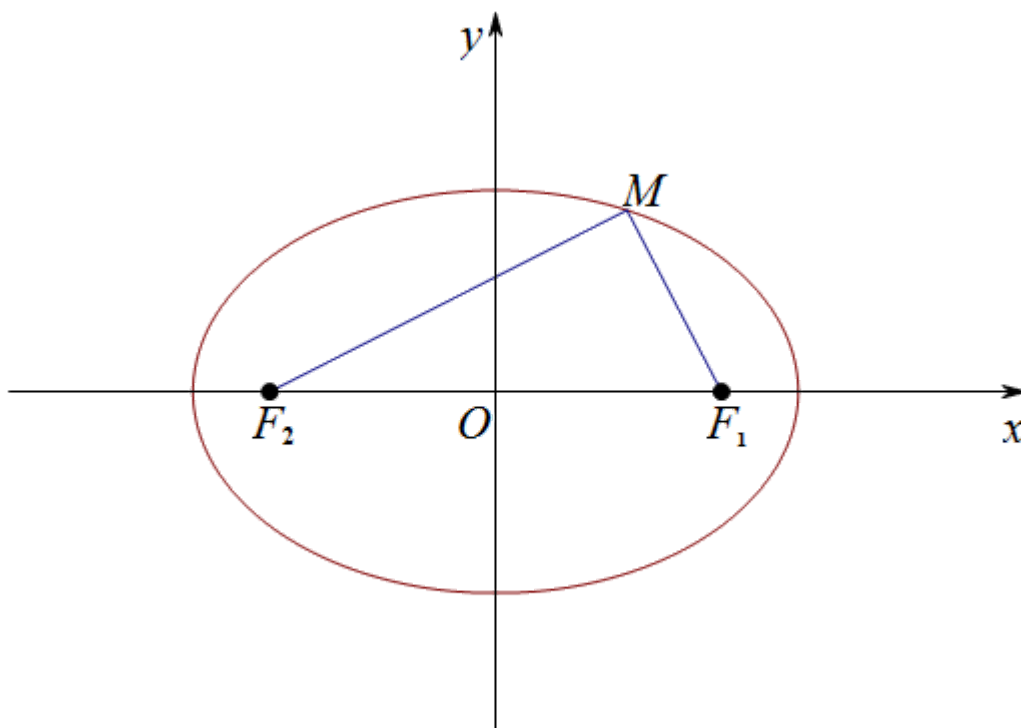
这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点的距离叫做椭圆的**焦距**。

【特别说明】定义中加限制条件“（常数）大于 $|F_1F_2|$ ”的原因：

- ①当动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = \text{常数} = |F_1F_2|$ 时，动点 M 的轨迹_____
- ②当动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = \text{常数} < |F_1F_2|$ 时，动点 M 的轨迹不存在。

2. 分析绘图

以过焦点 F_1, F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy ，如下图所示，此时，焦点 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$ 。



设 $P(x, y)$ 是椭圆上的任意一点，根据椭圆的定义可知，

点 P 在椭圆上的充分必要条件是_____①，

根据平面上两点之间的距离公式，有

$|PF_1| =$ _____②； $|PF_2| =$

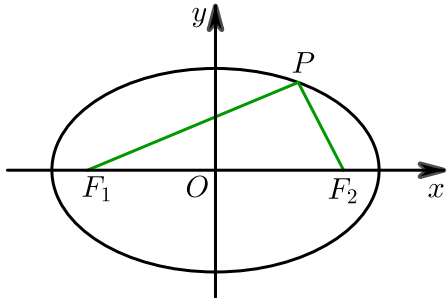
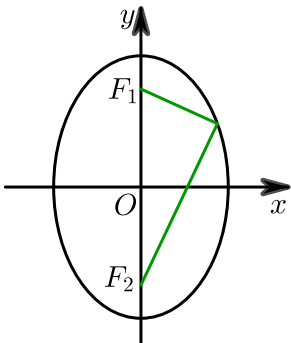
_____③。

因此上述条件①的代数表示就是：

_____④。



3. 椭圆的标准方程

定义	$ PF_1 + PF_2 = 2a (2a > 2c > 0)$	
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
焦点	$(-c, 0), (c, 0)$	$(0, -c), (0, c)$
a, b, c 的关系	$a^2 - b^2 = c^2$	



椭圆的方程

- 1 若椭圆 $2a^2x^2 - ay^2 = 2$ 的一个焦点是 $(-2, 0)$, 则 $a = (\quad)$.
- A. $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$
- 2 如果方程 $\frac{x^2}{5-m} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 m 的取值范围是 $(\quad)$.
- A. $4 < m < 5$ B. $m > \frac{9}{2}$ C. $4 < m < \frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{2} < m < 5$



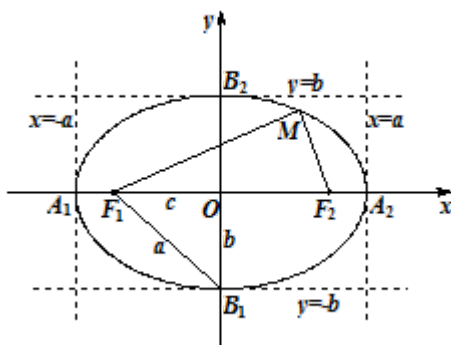
椭圆的定义及基础应用

- 3 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一动点, P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 $(\quad)$.
- A. $2b$ B. $2a$ C. b D. a
- 4 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 6, 则点 P 到另一个焦点的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 5 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 0 > b$ ” 是 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 表示椭圆的 $(\quad)$.
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 6 对于常数 m, n , “ $mn > 0$ ” 是 “方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的曲线是椭圆” 的 $(\quad)$.
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



椭圆的基础性质

以标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 为例研究



1. 范围

$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$.

2. 对称性

以 x 轴、 y 轴为对称轴；

以坐标原点为对称中心，椭圆的对称中心又叫做椭圆的中心。

3. 顶点

椭圆与它的对称轴的四个交点，如图中的 A_1, A_2, B_1, B_2 。

4. 长轴与短轴

焦点所在的对称轴上，两个顶点间的线段称为椭圆的**长轴**，如图中线段的 A_1A_2 ；

另一对顶点间的线段叫做椭圆的**短轴**，如图中的线段 B_1B_2 。

5. 离心率

$e = \frac{c}{a}$ ，焦距与长轴长之比， $0 < e < 1$ ；

e 越趋近于 1，椭圆越扁；反之， e 越趋近于 0，椭圆越趋近于圆。



对称性

- 7 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， $A(-2, 0)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(1, \frac{3}{2})$ 、 $D(1, -\frac{3}{2})$ 四个点中恰有三个点在椭圆 C 上，则椭圆 C 的方程是 _____。



长短轴、焦距

- 8 椭圆 $9x^2 + y^2 = 36$ 的短轴长为 ()。
- A. 2 B. 4 C. 6 D. 12
- 9 已知椭圆的方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$ ，则椭圆的长轴长为 ()。
- A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{7}$ D. 10



- 10 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 焦距为 2, 则 ().
A. $a = 4$ B. $a = 2$ C. $b = 4$ D. $b = 2$
- 11 已知椭圆 $x^2 + my^2 = 1$ 的焦点在 x 轴上, 长轴长是短轴长的两倍, 则 $m =$ ().
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{4}$ D. 4
- 12 已知椭圆 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{10-m} = 1$ 的长轴在 x 轴上, 焦距为 4, 则 m 等于 ().
A. 8 B. 7 C. 6 D. 5



离心率

- 13 椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 的离心率为 ().
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2
- 14 已知椭圆的一个焦点为 $F(0, 1)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 则该椭圆的标准方程为 ().
A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$
- 15 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(2, 0)$ 的椭圆的标准方程是 ().
A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 或 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
C. $x^2 + 4y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 或 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
- 16 焦点在 x 轴上, 短轴长为 8, 离心率为 $\frac{3}{5}$ 的椭圆的标准方程是 ().
A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 17 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦点在 y 轴上, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 则实数 m 的值为 ____.
- 18 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$, 则实数 $k =$ ____.
- 19 “ $m = 8$ ” 是 “椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 的 ().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



椭圆性质的简单扩展

1. 焦点三角形的概念

设 M 是椭圆上一点, F_1, F_2 为椭圆的焦点,

当点 M, F_1F_2 不在同一条直线上时, 它们构成一个三角形 —— **焦点三角形**

2. 焦点三角形的常用公式

① 焦点三角形的周长 $L = 2a + 2c$.

② 焦点三角形的面积 $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\sin \frac{\angle F_1MF_2}{2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1MF_2}{2}$.

3. 椭圆的通径

(1) 定义: 过椭圆的焦点且垂直于长轴的直线被椭圆截得的弦称为椭圆的通径

(2) 长度: 无论焦点在 x 轴上还是在 y 轴上, 椭圆的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$



焦点三角形

- 20 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_1| = 4$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 ().
- A. 90° B. 60° C. 120° D. 45°



通径

- 21 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的通径长为 _____.

第 2 讲

双曲线的概念与性质





双曲线的基本概念

1. 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 且不等于零）的点的轨迹叫作**双曲线**.

这两个定点叫作双曲线的**焦点**，两焦点的距离叫作双曲线的**焦距**.

【特别说明】

①若将“小于 $|F_1F_2|$ ”改为“等于 $|F_1F_2|$ ”，其余条件不变，此时动点的轨迹是

若将其改为“大于 $|F_1F_2|$ ”，其余条件不变，此时动点轨迹不存在.

②若将绝对值去掉，其余条件不变，则动点的轨迹成为_____.

③若将“常数不等于零”改为“等于零”，则此时动点轨迹是_____.

2. 双曲线的两种标准方程

①焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 焦距为 $2c$, 且 $c^2 = a^2 + b^2$

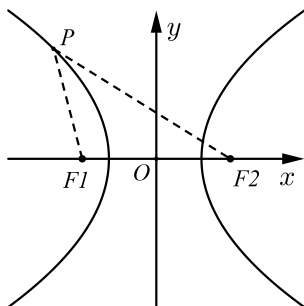


图2-3-1

②焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

焦点分别为 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$, 焦距为 $2c$, 且 $c^2 = a^2 + b^2$

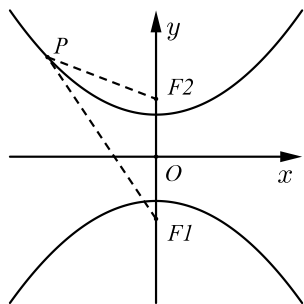


图2-3-2



双曲线的方程

1 焦距是 10，虚轴长是 8，经过点 $(3\sqrt{2}, 4)$ 的双曲线的标准方程是 ().

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ D. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$



- 2 已知方程 $\frac{x^2}{m+2} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线, 则实数 m 的取值范围为 _____.

双曲线的定义及应用

- 3 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 M 到左焦点的距离为 4, 则点 M 到右焦点的距离为 _____.
- 4 双曲线 $4x^2 - y^2 + 64 = 0$ 上一点 P 到它的一个焦点的距离等于 1, 则点 P 到另一个焦点的距离等于 _____.

双曲线的基础性质

1. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的几何性质比较

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		
范围	$ x \geq a, y \in \mathbb{R}$	$ y \geq a, x \in \mathbb{R}$
对称性	对称轴: x 轴、 y 轴; 对称中心: 原点	
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
轴	线段 A_1A_2 是双曲线的 实轴 , 线段 B_1B_2 是双曲线的 虚轴 . 实轴长 $ A_1A_2 = 2a$, 虚轴长 $ B_1B_2 = 2b$	
渐近线	直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$	直线 $y = \pm \frac{a}{b}x$
离心率	$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} (e > 1)$	

2. 渐近线

通过观察双曲线的图形可以看出, 当双曲线的各支向外延伸时, 与两条直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 逐渐接近, 但永不相交.

我们把这两条直线称为双曲线的渐近线.

3. 离心率的几何意义

e 越大, $\frac{b}{a}$ 也越大, 即渐近线了 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大, 这时双曲线的开口就越大. 因此离心率 e 可以用来表示双曲线开口的程度.



双曲线的基本量求解

- 5** 已知双曲线方程 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 则下列叙述正确的是 ().
A. 焦点 $(0, \pm 2)$ B. 渐近线方程: $y = \pm\sqrt{3}x$
C. 实轴长为 $2\sqrt{3}$ D. 离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1(a > 0)$ 的离心率是 $\sqrt{3}$, 则 $a = ()$.
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7 双曲线方程为 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} = 1$, 则它的渐近线的方程为 ().
A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm\frac{1}{2}x$

8 双曲线 $3x^2 - y^2 = 12$ 的焦点坐标是 ().
A. $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ B. $(0, \pm 2\sqrt{2})$ C. $(\pm 4, 0)$ D. $(0, \pm 4)$

9 双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 的渐近线方程是 ().
A. $y = \pm\frac{3}{2}x$ B. $y = \pm\frac{2}{3}x$ C. $y = \pm\frac{9}{4}x$ D. $y = \pm\frac{4}{9}x$



离心率或渐近线的应用

- 10 若双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m^2 + 4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 则 m 的值为 _____.

11 双曲线 $x^2 - y^2 = m (m \neq 0)$ 的渐近线方程是 _____.

12 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-3, 0)$ 、 $F_2(3, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$, 则它的标准方程为 _____.

13 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $\sqrt{2}x - y = 0$, 它的一个焦点为 $(3, 0)$, 则双曲线的方程为 _____.

14 下列各对双曲线中, 既有相同的离心率, 又有相同渐近线的是 ().

A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 与 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 与 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

C. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ 与 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 与 $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{9} = 1$

15 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$



- 16 “双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ” 是 “双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ” 的 ().
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
- 17 若双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $D: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 有相同的渐近线且双曲线 C 经过点 $(2, 6)$, 则双曲线 C 的实轴长为 ().
 A. 4 B. 12 C. $2\sqrt{30}$ D. $4\sqrt{5}$
- 18 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一个焦点在直线 $x + 2y = 5$ 上, 则双曲线的渐近线方程为 ().
 A. $y = \pm \frac{3}{4}x$ B. $y = \pm \frac{4}{3}x$ C. $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ D. $y = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}x$
- 19 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$, 则双曲线的离心率为 ().
 A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

包罗万象 举一干从 1

- 20 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线相互垂直, 且焦距为 4, 则其实轴长为 ().
 A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$
- 21 双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 ().
 A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
- 22 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 左支上点 B 与右焦点 F 关于渐近线对称, O 为坐标原点, 则 $|OB| =$ _____.
- 23 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_1, F_2 为直径的圆与双曲线渐近线的一个交点为 $(3, 4)$, 则双曲线的方程为 _____.



双曲线性质的简单扩展

1. 焦点三角形的概念

双曲线上一点 P 与双曲线的两个焦点 F_1, F_2 构成的三角形称之为**焦点三角形**, 其中 $|PF_1|, |PF_2|, |F_1F_2|$ 为三角形的三边.

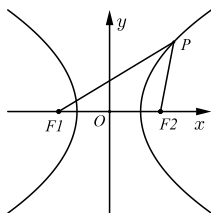


图2-3-6

2. 焦点三角形的常用公式

$$\textcircled{1} S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1PF_2;$$

$$\textcircled{2} S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cot \frac{\theta}{2} (\theta = \angle F_1PF_2);$$

3. a, b, c 三个量在图像中的关系

在双曲线的标准方程中, 因为 a, b, c 三个量满足 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以长度分别为 a, b, c 的三条线段恰好构成一个直角三角形, 且长度为 c 的线段是斜边

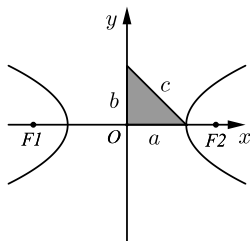


图2-3-3

4. 双曲线的通径

(1) 定义: 过双曲线的焦点且垂直于实轴的直线被双曲线截得的弦称为双曲线的**通径**

(2) 长度: 无论焦点在 x 轴上还是在 y 轴上, 双曲线的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$



焦点三角形

24 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 ().

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

25 F_1, F_2 为双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 ().

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

第 3 讲

抛物线的概念与性质





抛物线的基本概念

1. 抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**.
 定点 F 叫作抛物线的**焦点**, 定直线 l 叫作抛物线的**准线**.

【特别说明】

注意定点 F 不在定直线 l 上, 否则动点 M 的轨迹不是抛物线, 而是过_____

2. 抛物线的标准方程

标准方程	图像	焦点坐标	准线方程
$y^2 = 2px (p > 0)$		$F(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$
$y^2 = -2px (p > 0)$		$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$x = \frac{p}{2}$
$x^2 = 2py (p > 0)$		$F(0, \frac{p}{2})$	$y = -\frac{p}{2}$
$x^2 = -2py (p > 0)$		$F(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$



3. 四种形式的抛物线的共同点

- ①顶点都在原点；
- ②焦点都在坐标轴上，开口方向都由一次项系数的符号来确定；
- ③准线与焦点所在的坐标轴垂直，垂足与焦点关于原点对称，它们与原点的距离都等于一次项系数绝对值的 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.



抛物线的方程

- 1 顶点在坐标原点，对称轴为坐标轴且经过点 $(-2, 3)$ 的抛物线方程是 ().

A. $y^2 = \frac{9}{4}x$

B. $x^2 = \frac{4}{3}y$

C. $y^2 = -\frac{9}{4}x$ 或 $x^2 = -\frac{4}{3}y$

D. $y^2 = -\frac{9}{2}x$ 或 $x^2 = \frac{4}{3}y$



抛物线的定义及应用

- 2 已知点 $A(x_0, 1)$ 在抛物线 $y = x^2$ ，则点 A 与点 $(0, \frac{1}{4})$ 之间的距离为 ____.

- 3 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 15，到 y 轴的距离为 12，则 p 的值为 ().

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

- 4 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m)$ 到其焦点的距离为 5，则该抛物线的准线方程为 ____.



抛物线的基础性质

四种形式的抛物线的几何性质

标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
图像				
范围	$x \geq 0, y \in \mathbb{R}$	$x \leq 0, y \in \mathbb{R}$	$y \geq 0, x \in \mathbb{R}$	$y \leq 0, x \in \mathbb{R}$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦点	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$F(0, \frac{p}{2})$	$F(0, -\frac{p}{2})$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
顶点坐标	$O(0, 0)$			
离心率	$e = 1$			



求解准线方程

- 5 抛物线 $y^2 = -8x$ 的准线方程为 ().
A. $x = -2$ B. $x = -1$ C. $y = 1$ D. $x = 2$
- 6 抛物线 $y = x^2$ 的准线方程为 ____.



豪厘不伐 将用斧柯

- 7 抛物线 $y = -2x^2$ 的准线方程是 ().
A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = \frac{1}{8}$ C. $y = \frac{1}{2}$ D. $y = \frac{1}{8}$
- 8 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程为 ____.
- 9 抛物线 $x = -\frac{1}{4}y^2$ 的准线方程为 ().
A. $y = 1$ B. $y = -1$ C. $x = 1$ D. $x = -1$



根据准线方程确定抛物线

- 10 若抛物线的准线方程为 $x = -7$, 则抛物线的标准方程为 ().
A. $x^2 = -28y$ B. $x^2 = 28y$ C. $y^2 = -28x$ D. $y^2 = 28x$
- 11 准线方程为 $x = -2$ 的抛物线的标准方程是 ().
A. $y^2 = -4x$ B. $y^2 = -8x$ C. $y^2 = -x$ D. $y^2 = 8x$
- 12 若抛物线的准线方程为 $y = 2$, 则该抛物线的标准方程是 ____.



豪厘不伐 将用斧柯

- 13 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程是 $y = -1$, 则 a 的值为 ().
A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$



求解焦点坐标

- 14 抛物线 $x^2 = -2y$ 的焦点坐标为 ().
A. $(-\frac{1}{8}, 0)$ B. $(0, -\frac{1}{8})$ C. $(-\frac{1}{2}, 0)$ D. $(0, -\frac{1}{2})$



15 已知抛物线的标准方程为 $y^2 = -8x$ ，则抛物线的焦点坐标为 _____ .

16 抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点坐标为 _____ .

豪厘不伐 将用斧柯

17 抛物线 $y = 3x^2$ 的焦点坐标是 _____ .

18 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，则它的焦点坐标是 () .

A. $(0, \frac{1}{16})$

B. $(\frac{1}{16}, 0)$

C. (1, 0)

D. (0, 1)

19 抛物线 $y = ax^2$ 的焦点坐标为 _____ .



根据焦点坐标确定抛物线

20 焦点为 $F(3, 0)$ 的抛物线标准方程为 _____ .



综合应用

21 若抛物线 $y^2 = 2x$ 上一点 P 到准线的距离等于它到原点的距离，则点 P 的坐标为 _____ .

精进不休 日新月异

22 已知抛物线方程为 $y^2 = 2px$ ，其中 $p > 0$ ，焦点为 F ，准线为 l ，过抛物线上一点 M 作 l 的垂线，垂足为 E ，若 $|EF| = |MF|$ ，点 M 的横坐标是 3，则 $p =$ _____ .

包罗万象 举一干从

23 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点到直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 的距离是 _____ .

24 已知圆 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 的圆心 M ，则抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F ，若 M 与 F 关于直线 $5x + y - m = 0$ 对称，则 $m =$ _____ .



抛物线性质的简单扩展

1. 焦半径公式及其应用

(1) 定义：设 M 是抛物线上一点，焦点为 F ，则线段 MF 叫作抛物线的**焦半径**

(2) 长度：由抛物线定义可知

若 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上，则 $|MF| = x_0 + \frac{p}{2}$ ；

若 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = -2px (p > 0)$ 上，则 $|MF| = \frac{p}{2} - x_0$ ；

若 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上，则 $|MF| = y_0 + \frac{p}{2}$ ；

若 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = -2py (p > 0)$ 上，则 $|MF| = \frac{p}{2} - y_0$ 。

2. 焦点弦

(1) 定义：如图 2-4-2， AB 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 过焦点 F 的一条弦，记作**焦点弦**

(2) 长度：过 A 、 B 分别向抛物线的准线作垂线，垂足分别为 A_1 、 B_1 ，

则根据抛物线的定义有 $|AF| = |AA_1|$ ， $|BF| = |BB_1|$ ，

故 $|AB| = |AF| + |BF| = |AA_1| + |BB_1| = x_1 + x_2 + p$ 。

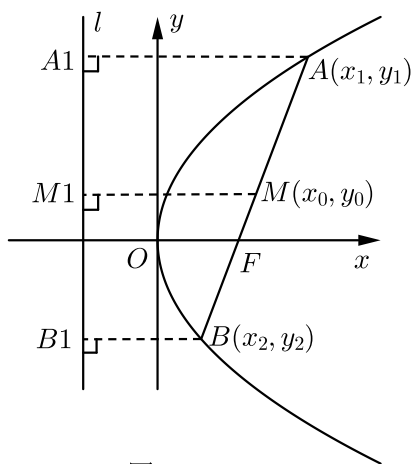


图 2-4-2

3. 抛物线的通径

(1) 定义：过焦点且与焦点所在的轴垂直的直线与抛物线交于点 M_1 、 M_2 ，线段 M_1M_2 叫作抛物线的**通径**。

(2) 长度：将 $x_0 = \frac{p}{2}$ 代入 $y^2 = 2px$ 得 $y = \pm p$ ，故抛物线 $y^2 = 2px$ 的通径长为 $2p$ 。

4. 抛物线的焦准距

(1) 定义：抛物线的焦点到它的准线的距离，叫做**焦准距**

(2) 长度： p



焦准距

25 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点到准线的距离为 ().

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8



焦半径

26 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 P 到焦点的距离为 3, 若点 P 的横坐标为 2, 则抛物线方程为 ().

- A. $y^2 = 6x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 2x$ D. $y^2 = x$

27 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 M 到焦点的距离是 a ($a > \frac{p}{2}$), 则点 M 的横坐标是 ().

- A. $a + \frac{p}{2}$ B. $a - \frac{p}{2}$ C. $a + p$ D. $a - p$



豪厘不伐 将用斧柯

28 若抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到其焦点的距离为 4, 则点 P 的坐标为 _____.



精进不休 日新月异

29 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF| = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 ().

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

30 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点, A, B 是抛物线上两个不同的点. 若 $|AF| + |BF| = 5$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 _____.

