

04圆锥曲线练习册

1. 直线与圆

1 直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 的倾斜角 α 的大小为 () .

A. 30°

B. 60°

C. 120°

D. 150°

答案 A

解析 直线方程可转化为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$k = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

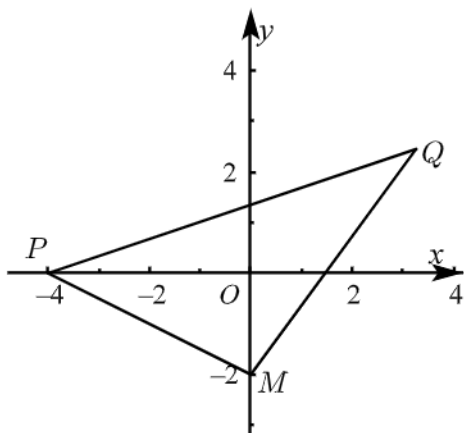
$$\therefore \alpha = 30^\circ .$$

故选 A .

2 已知两点 $P(-4, 0)$, $Q(3, 2)$, 若直线 $y = kx - 2$ 与线段 PQ 相交, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

答案 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

解析 因为直线 $y = kx - 2$ 恒过定点 $M(0, -2)$, 根据题意, 作图如下:



直线 $y = kx - 2$ 与线段 PQ 相交的临界情况分别为直线 MP 和直线 MQ ,

已知 $k_{MP} = -\frac{1}{2}$, $k_{MQ} = \frac{4}{3}$, 由图可知:

当直线绕着点 M 向 y 轴旋转时, 其斜率范围为: $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$;

当直线与 y 轴重合时，没有斜率；

当直线绕着点 M 从 y 轴至 MP 旋转时，其斜率范围为： $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ ；

综上所述： $k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ 。

3 过点 $(-1, 0)$ 且与直线 $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{-3}$ 有相同方向向量的直线方程为()。

- A. $3x + 5y - 3 = 0$ B. $3x + 5y + 3 = 0$ C. $3x + 5y - 1 = 0$ D. $3x + 5y + 1 = 0$

答案 B

解析 由 $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{-3}$ 可得， $3x + 5y + 8 = 0$ ，即直线的斜率 $-\frac{3}{5}$ ，

由题意可知所求直线的斜率 $k = -\frac{3}{5}$ ，

故所求的直线方程为 $y = -\frac{3}{5}(x - 1)$ 即 $3x + 5y + 3 = 0$ 。

故选：B。

4 已知直线 l 经过两条直线 $2x + 3y + 8 = 0$ 和 $x - y - 1 = 0$ 的交点，且截距相等，则直线 l 的方程为_____。

答案 $x + y + 3 = 0$ 或 $y = 2x$

解析 $\begin{cases} 2x + 3y + 8 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ ，

①截距非零，

设 $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ ，

$\frac{-1}{a} + \frac{-2}{a} = 1$ ，得 $a = -3$ ，

$\therefore l: x + y + 3 = 0$ 。

②截距为零，

$l: y = 2x$ 。

D. 既不充分也不必要条件.

当 $m = -7$ 时,

$l_1: -4x + 4y = 26$, $l_2: 2x - 2y = 8$, 满足条件.

(2) $\because l_1 \perp l_2$,

$\therefore (3+m) \times 2 + 4(5+m) = 0$,

$6 + 2m + 20 + 4m = 0$,

$\therefore m = -\frac{13}{3}$.

7 若直线 $l_1: x + ay + 6 = 0$ 与 $l_2: (a-2)x + 3y + 2a = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为 ().

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

答案 A

解析 由 $a(a-2) - 1 \times 3 = 0$ 得,

$\therefore a = 3$ 或 $a = -1$,

$\therefore$ 直线 $l_1 //$ 直线 l_2 , 当 $a = 3$ 时两直线重合,

$\therefore a = -1$,

$\therefore$ 直线 $l_1: x - y + 6 = 0$, 即: $3x - 3y + 18 = 0$,

直线 $l_2: 3x - 3y + 2 = 0$,

$\therefore$ 两平行直线间的距离

$$d = \frac{|18 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

故选: A.

8 已知圆心在直线 $y = x$ 上的圆与直线 $x + y = 0$ 及 $x + y + 4 = 0$ 都相切, 则圆的方程为 _____.

答案 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

解析 由题意设圆心坐标为 (a, a) ,

$$\text{则有 } \frac{|a+a|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+a+4|}{\sqrt{2}},$$

解得 $a = -1$,

所以圆的圆心为 $(-1, -1)$,

半径为 $r = \frac{|2a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

所以圆 C 的方程为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$,

故答案为 : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

9 已知圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点, 则该直径所在直线的方程为 () .

- A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $x - 2y - 5 = 0$ C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$

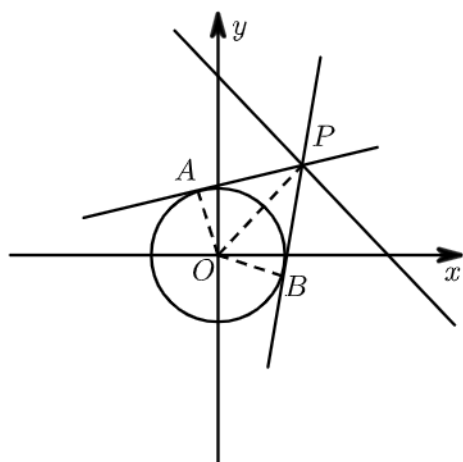
答案 B

解析 由题得圆的圆心坐标为 $(1, -2)$,
所求的直线的斜率为 $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$,
所以所求直线的方程为 $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$,
即 $x - 2y - 5 = 0$.
故选 B .

10 过直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上的点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 若两条切线的夹角是 60° , 则点 P 的坐标是 _____ .

答案 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

解析 如图, 根据题意画出相应的图形,



直线 PA 和 PB 为过点 P 的两条切线，

且 $\angle APB = 60^\circ$. 设点 P 的坐标为 (a, b) ,

连接 OP, OA, OB , $\therefore OA \perp AP, OB \perp BP, PO$ 平分 $\angle APB$.

$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, $\angle APO = \angle BPO = 30^\circ$.

又 $\because$ 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 1 , $\therefore OA = OB = 1$.

$\therefore OP = 2OA = 2OB = 2 \therefore \sqrt{a^2 + b^2} = 2$,

即 $a^2 + b^2 = 4$ ① . 又点 P 在直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上 ,

$\therefore a + b - 2\sqrt{2} = 0$ ② . 联立 ①② 解得 : $a = b = \sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

11 圆 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ 与圆 $C_2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ 的位置关系是 () .

A. 相交

B. 相离

C. 内切

D. 内含

答案 D

解析 由题知 $C_1 (0, 0)$, $r_1 = 3$, $C_2 (1, -2)$, $r_2 = 6$,

属于圆心距 $|C_1 C_2| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{5}$,

因为 $r_2 - r_1 = 3$, 所以 $|C_1 C_2| < r_2 - r_1$,

所以圆 C_1 和圆 C_2 的位置关系是内含 .

故选 : D .

2. 圆锥曲线

12 已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，且长轴长为 12，离心率为 $\frac{1}{3}$ ，则椭圆的方程为 () .

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$
 B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$
 C. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$
 D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

答案 D

解析 由题意知，

$$2a = 12, \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } a = 6, c = 2,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 32,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

故选 D .

13 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 A ，右焦点为 F ，直线 AF 与 C 交于点 B . 若

$|AF| = 2|FB|$ ，则 C 的离心率为 () .

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案 B

解析 设 $B(x, y)$ ，

因为 $|AF| = 2|FB|$ ，

所以 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，

由 $A(0, b)$ ， $F(c, 0)$ ，可得 $(c, -b) = 2(x - c, y)$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{3c}{2}, y = -\frac{b}{2},$$

$$\text{代入椭圆方程可得 } \frac{9c^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4b^2} = 1,$$

化简得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, 即 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 : B .

- 14 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 点 P 在椭圆上 , 若 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形 , 则点 P 到 x 轴的距离为 _____ .

答案 $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$

解析 设点 $P(x, y)$, 则点 P 到 x 轴的距离为 $|y|$,

$\therefore a = 5$, $b = 4$, $\therefore c = 3$.

(1) 若 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ 或 $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$,

令 $x = \pm 3$ 得 $y^2 = 16 \times \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{16^2}{25}$,

$\therefore |y| = \frac{16}{5}$, 即点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$.

(2) 若 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 10 \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 6^2 \end{cases}$,

$\therefore |PF_1||PF_2| = \frac{1}{2} \times (10^2 - 6^2) = 32$,

$\therefore \frac{1}{2} |PF_1||PF_2| = \frac{1}{2} |F_1F_2||y|$,

$\therefore |y| = \frac{16}{3}$.

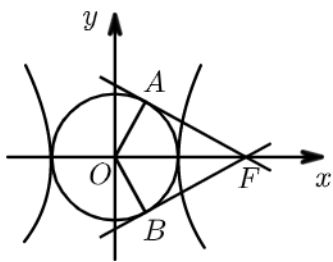
由 (1) (2) 知 : 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$.

故答案为 : $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$.

- 15 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线 , 切点分别为 A , B . 若 $\angle AOB = 120^\circ$ (O 是坐标原点) , 则双曲线 C 的离心率为 _____ .

答案 2

解析



由题知 $OA \perp AF$, $OB \perp BF$ 且 $\angle AOB = 120^\circ$,

$\therefore \angle AOF = 60^\circ$,

又 $OA = a$, $OF = c$,

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{OA}{OF} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = 2 .$$

故答案为 : 2 .

- 16 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 , 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1 , l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A 、 B 两点 , 直线 l_2 与 C 交于 D 、 E 两点 , 则 $|AB| + |DE|$ 的最小值为 () .

A. 16

B. 14

C. 12

D. 10

答案 A

解析 方法一 : 显然直线斜率都存在 ,

设直线方程为 $l_1: y = k(x - 1)$, 则 $l_2: y = -\frac{1}{k}(x - 1)$,

联立 $\begin{cases} y = k(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$,

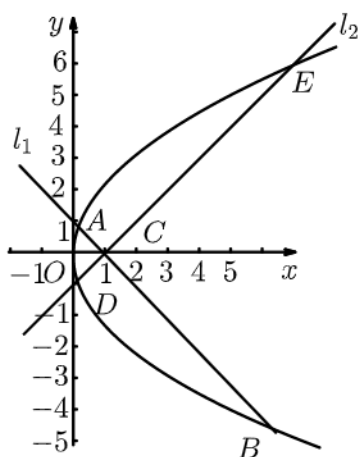
$$\therefore x_A + x_B = 2 + \frac{4}{k^2} ,$$

同理可得 $x_D + x_E = 2 + 4k^2$,

$$\therefore |AB| + |DE| = x_A + x_B + 2 + x_D + x_E + 2 = 8 + \frac{4}{k^2} + 4k^2 \geq 16 ,$$

当且仅当 $k = \pm 1$ 时等号成立 .

方法二 : 如图 , $l_1 \perp l_2$, 直线 l_1 与 C 交于 A 、 B 两点 ,



直线 l_2 与 C 交于 D 、 E 两点，

要使 $|AB| + |DE|$ 最小，

则 A 与 D ， B ， E 关于 x 轴对称，即直线 DE 的斜率为 1 ，

又直线 l_2 过点 $(1, 0)$ ，

则直线 l_2 的方程为 $y = x - 1$ ，

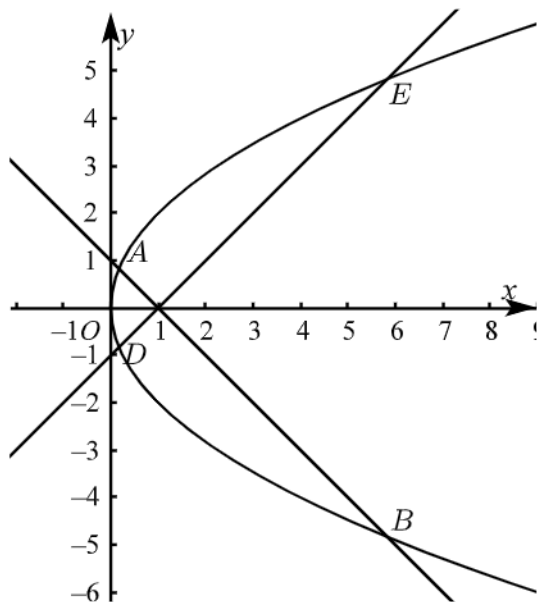
联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x - 1 \end{cases}$ ，则 $y^2 - 4y - 4 = 0$ ，

$\therefore y_1 + y_2 = 4$ ， $y_1 y_2 = -4$ ，

$\therefore |DE| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{32} = 8$ ，

$\therefore |AB| + |DE|$ 的最小值为 $2|DE| = 16$ 。

方法三：



设直线 l_1 的倾斜角为 θ ，则 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2} + \theta$ ，

根据焦点弦长公式可得 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta}$ ，

$|DE| = \frac{2p}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} = \frac{2p}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\cos^2 \theta}$ ，

$$\therefore |AB| + |DE| = \frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{4}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{16}{\sin^2 2\theta},$$

$$\therefore 0 < \sin^2 2\theta \leq 1,$$

$\therefore$ 当 $\theta = 45^\circ$ 时, $|AB| + |DE|$ 的最小, 最小为 16.

故选 A.

方法四: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$, $E(x_4, y_4)$, 直线 l_1 的方程为 $y = k_1(x - 1)$, 联立方

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k_1(x - 1) \end{cases}, \text{ 即 } k_1^2 x - 2k_1^2 x + 4x + k_1^2 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{-2k_1^2 - 4}{k_1^2} = \frac{2k_1^2 + 4}{k_1^2},$$

$$\text{同理, 直线 } l_2 \text{ 与抛物线的交点满足 } x_3 + x_4 = \frac{2k_2^2 + 4}{k_2^2},$$

由抛物线定义可知 $|AB| + |DE| = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2p$

$$\begin{aligned} &= \frac{2k_1^2 + 4}{k_1^2} + \frac{2k_2^2 + 4}{k_2^2} + 4 \\ &= \frac{4}{k_1^2} + \frac{4}{k_2^2} + 8 \geq 2\sqrt{\frac{16}{k_1^2 k_2^2}} + 8 = 16 \end{aligned}$$

当且仅当 $k_1 = -k_2 = 1$ (或 -1) 时取等号,

故选 A.

设直线 l_1 的倾斜角为 α , 则 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$,

$$\text{则 } |DE| = \frac{2p}{\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{2p}{\cos^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| + |DE| &= \frac{2p}{\sin^2 \alpha} + \frac{2p}{\cos^2 \alpha} \\ &= 4 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= 4 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \geq 4 \times (2 + 2) = 16, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4},$$

故选 A.

17 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为 ().

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\sqrt{5} + 1$

答案 C

解析

抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$, 可得 : $y^2 = 4x$, 抛物线的焦点坐标 $(1, 0)$,

依题意点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值 ,

就是 P 到 $(0, 2)$ 与 P 到该抛物线准线的距离之和减去 1 ,

由抛物线的定义 , 可得则点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与 P 到该抛物线焦点坐标的距离之和减 1 ,

可得 : $\sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$.

故选 C .

18

已知双曲线 $C: \frac{4x^2}{3} - b^2y^2 = 1 (b > 0)$ 的右焦点到其中一条渐近线的距离等于 $\frac{1}{2}$, 抛物线

$E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与双曲线 C 的右焦点重合 , 则抛物线 E 上的动点 M 到直线

$l_1: 4x - 3y + 6 = 0$ 和 $l_2: x = -1$ 的距离之和的最小值为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案

B

解析

双曲线 $C: \frac{4x^2}{3} - b^2y^2 = 1 (b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3b}x$,

右焦点 $\left(\sqrt{\frac{3b^2+4}{4b^2}}, 0 \right)$ 到其一条渐近线的距离等于 $\frac{1}{2}$,

可得 $\frac{\frac{\sqrt{3b^2+4}}{2b}}{\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}} = \frac{1}{2}$,

解得 : $b = 2$,

即有 $c = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$,

由题意可得 : $\frac{p}{2} = 1$,

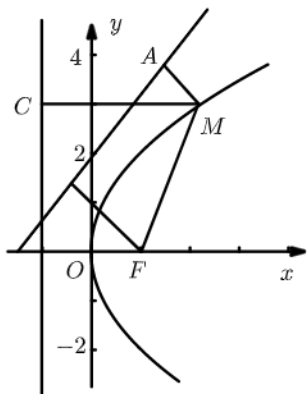
解得 : $p = 2$,

即有抛物线的方程为 $y^2 = 4x$,

如图 , 过点 M 作 $MA \perp l_1$ 于点 A ,

作 $MB \perp$ 准线 $l_2: x = -1$ 于点 C ,

连接 MF ,



根据抛物线的定义得 $MA + MC = MA + MF$,

设 M 到 l_1 的距离为 d_1 , M 到直线 l_2 的距离为 d_2 ,

$$\therefore d_1 + d_2 = MA + MC = MA + MF,$$

根据平面几何知识,

可得当 M 、 A 、 F 三点共线时, $MA + MF$ 有最小值.

$$\therefore F(1, 0) \text{ 到直线 } l_1: 4x - 3y + 6 = 0 \text{ 的距离为 } \frac{|4 - 0 + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = 2,$$

$\therefore MA + MF$ 的最小值是 2,

由此可得所求距离和的最小值为 2.

故选 B.

19 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $x - \sqrt{3}y = 0$, 它的一个焦点在抛物线 $y^2 = -4x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

A. $4x^2 - 12y^2 = 1$

B. $4x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$

C. $12x^2 - 4y^2 = 1$

D. $\frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = 1$

答案 D

解析 $\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $x - \sqrt{3}y = 0$,

$$\therefore a : b = \sqrt{3} : 1,$$

$\therefore$ 双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = -4x$ 的准线 $x = 1$ 上,

$$\therefore c = 1.$$

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

解得： $b^2 = \frac{1}{4}$ ， $a^2 = \frac{3}{4}$ ，

∴此双曲线的方程为： $\frac{4}{3}x^2 - 4y^2 = 1$ 。

故选：D。

20 已知双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ ，过点 $P(2, 1)$ 作弦且弦被点 P 平分，则此弦所在的直线方程为（ ）。

- A. $x + 2y - 4 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$ C. $2x - y - 3 = 0$ D. $x - 2y = 0$

答案 D

解析 设过 $P(2, 1)$ 的弦交双曲线为 AB ，

由点差法：

$$k_{AB} \cdot k_{OP} = \frac{4}{16}，$$

$$k_{AB} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}，$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore AB: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)，$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x。$$

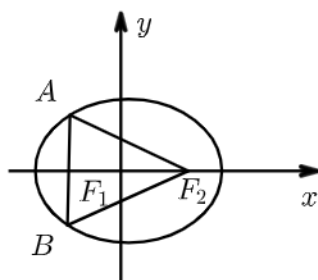
故选D。

21 已知点 F_1 、 F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A 、 B 两点，若 $\triangle ABF_2$ 为正三角形，则椭圆的离心率是（ ）。

- A. 2 B. $\sqrt{2}$
C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案 D

解析 如图，



$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

将 $x = -c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 则 $AF_1 = \frac{b^2}{a}$,

因为 $\triangle ABF_2$ 为正三角形 ,

所以 $|F_1F_2| = \sqrt{3}|AF_1|$, 即 $2c = \frac{\sqrt{3}b^2}{a}$, 即 $2ac = \sqrt{3}b^2$, 又 $b^2 = a^2 - c^2$,

则 $2ac = \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}c^2$, 即 $\sqrt{3}c^2 + 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0$,

两边同时除以 a^2 可得 $\sqrt{3}e^2 + 2e - \sqrt{3} = 0$,

解得 $e = -\sqrt{3}$ 或 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $0 < e < 1$,

所以 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选 D .