

04圆锥曲线

1. 直线与圆

1 直线 l 绕它与 x 轴的交点逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 得到直线 $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$, 则直线 l 的直线方程 ()

A. $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$

B. $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$

C. $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$

D. $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$

答案 B

解析 直线 $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ 的斜率等于 $-\sqrt{3}$, 设倾斜角等于 θ , 即 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 绕它与 x 轴的交点 $(\sqrt{3}, 0)$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得到的直线的倾斜角等于 $\theta - \frac{\pi}{3}$, 故所求直线的斜率为 $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, 故所求的直线方程为 $y - 0 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$, 即 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$, 故选B.

2 已知点 $A(-1, 1)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(0, -1)$, 过点 C 的直线 l 与线段 AB 有公共点, 则直线 l 斜率 k 的取值范围是 () .

A. $[-2, 3]$

B. $[-2, 0) \cup (0, 3]$

C. $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

D. 以上都不对

答案 C

解析 $k_{BC} = \frac{2+1}{1-0} = 3$,
 $k_{AC} = \frac{-1-1}{0+1} = -2$,
 $\therefore k \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.
 故选C.

- 3 不论 k 为何实数，直线 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$ 恒通过一个定点，这个定点的坐标是_____.

答案 (2, 3)

解析 直线 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$

$$\text{即 } k(2x - y - 1) + (-x - 3y + 11) = 0,$$

$$\text{根据 } k \text{ 的任意性可得 } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - 3y + 11 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 不论 k 取什么实数时，直线 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$ 都经过一个定点(2, 3).

故答案为：(2, 3).

- 4 过曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$ 上点(1, $f(1)$)处的切线方程为_____.

答案 $3x - y - 2 = 0$

解析 $\because$ 曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1+2x^2}{x},$$

$$\therefore f'(1) = 3,$$

$$\therefore f(1) = 1,$$

$\therefore$ 过曲线 $C: f(x) = \ln x + x^2$ 上点(1, 1)处的切线方程为 $y - 1 = 3(x - 1)$ ，即 $3x - y - 2 = 0$.

故答案为： $3x - y - 2 = 0$.

- 5 设 $m \in \mathbf{R}$ ，则“ $m = -3$ ”是“直线 $l_1: mx + 3y = 2 - m$ 与 $l_2: x + (m+2)y = 1$ 平行”的().

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

答案 C

解析 因为直线 $l_1: mx + 3y = 2 - m$, $l_2: x + (m + 2)y = 1$,
 所以当 $l_1 // l_2$ 时,
 $m(m + 2) - 3 \times 1 = 0$, 解得 $m = -3$ 或 $m = 1$,
 $l_1: x + 3y = 1$, $l_2: x + 3y = 1$,
 故当 $m = 1$ 时, 两直线重合, 不合题意,
 故实数 $m = -3$,
 故“ $m = -3$ ”是“ l_1 与 l_2 平行”的充要条件.
 故选: C.

6 已知直线 $l_1: ax + 4y - 2 = 0$ 与直线 $l_2: 2x - 5y + b = 0$ 互相垂直, 垂足为 $(1, c)$, 则 $a + b + c$ 的值为 ().

- A. 20 B. -4 C. 0 D. 24

答案 B

解析 直线 l_1 的斜率为 $-\frac{a}{4}$,
 直线 l_2 的斜率为 $\frac{2}{5}$,
 由两直线垂直, 可知 $-\frac{a}{4} \cdot \frac{2}{5} = -1$,
 得 $a = 10$,
 将垂足 $(1, c)$ 代入直线 l_1 的方程, 得 $c = -2$,
 把 $(1, -2)$ 代入直线 l_2 的方程, 得 $b = -12$,
 所以 $a + b + c = 10 - 12 - 2 = -4$.
 故选 B.

7 与直线 $2x - y - 1 = 0$ 的距离等于 $\sqrt{5}$ 的直线方程为 ().

- A. $2x - y + 4 = 0$ B. $2x - y - 6 = 0$
 C. $2x - y - 4 = 0$ 或 $2x - y + 6 = 0$ D. $2x - y + 4 = 0$ 或 $2x - y - 6 = 0$

答案 D

解析 设与直线 $2x - y - 1 = 0$ 的距离等于 $\sqrt{5}$ 的直线方程为: $2x - y + c = 0$,

由题意得： $\frac{|-1-c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ ，解得： $c_1=4$ ， $c_2=-6$ ，

故直线方程为： $2x - y + 4 = 0$ 或 $2x - y - 6 = 0$.

故选D.

8 已知直线 $x+2y-4=0$ 与直线 $2x+my+m+3=0$ 平行, 则它们之间的距离为().

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

答案 C

解析 因为直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与直线 $2x + my + m + 3 = 0$ 平行,

所以 $m = 4$,

则它们之间的距离为 $\frac{|-8-7|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

故选C .

9 已知圆 C 的圆心在直线 $x - 2y - 3 = 0$ 上, 且过点 $A(2, -3)$, $B(-2, -5)$, 则圆 C 的标准方程为 _____.

答案 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$

解析 由已知, 线段 AB 的中垂线所在直线与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 的交点即为圆 C 的圆心,

线段 AB 的斜率为： $K_{AB} = \frac{-3+5}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 线段 AB 的中垂线所在直线的斜率为 $-\frac{1}{K_{AB}} = -2$,

又: 线段 AB 的中点为 $(0, -4)$,

∴ 线段 AB 的中垂线所在直线方程为: $y + 4 = -2x$,

即 $2x + y + 4 = 0$,

$$\text{由} \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases},$$

求得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$,

$\therefore$ 圆 C 的圆心坐标为 $(-1, -2)$,

$\therefore$ 圆 C 的半径 r 满足: $r^2 = (2+1)^2 + (-3+2)^2 = 10$,

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$.

10 “ $m > \frac{1}{2}$ ”是“ $x^2 + y^2 - 2mx - m^2 - 5m + 3 = 0$ 为圆的方程”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

答案 A

解析 方程 $x^2 + y^2 - 2mx - m^2 - 5m + 3 = 0$ 表示圆,

需满足: $(-2m)^2 - 4(-m^2 - 5m + 3) > 0$,

解得 $m < -3$ 或 $m > \frac{1}{2}$,

所以“ $m > \frac{1}{2}$ ”是“ $x^2 + y^2 - 2mx - m^2 - 5m + 3 = 0$ 为圆的方程”的充分不必要条件.

故选 A.

11 圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程是().

A. $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$

B. $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

C. $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

D. $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$

答案 B

解析 圆的标准方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$,

圆心 $C(2, 0)$,

$\therefore$ 直线和圆相切于点 $P(1, \sqrt{3})$,

$\therefore CP$ 的斜率 $k = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 2} = -\sqrt{3}$,

则切线斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故切线方程为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$,

即 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$,

故选B.

- 12 已知直线 $ax + y - 2 = 0$ 与圆心为 C 的圆 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a =$ _____.

答案 $4 \pm \sqrt{15}$

解析 由题意, 圆心为 $C(1, a)$, 半径是2,
 C 到直线 $ax + y - 2 = 0$ 的距离等于 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$,
 于是有 $\frac{|1 \times a + a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{3}$,
 即 $a^2 - 8a + 1 = 0$, 解得 $a = 4 \pm \sqrt{15}$.

- 13 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$, 则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是 _____.

答案 相交

解析 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$, 即 $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$,
 其圆心 C_1 为 $(-1, -4)$, 半径 $r_1 = 5$,
 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$, 即 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$,
 其圆心 C_2 为 $(2, 2)$, 半径 $r_2 = \sqrt{10}$,
 则圆心距 $|C_1C_2| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$, $5 - \sqrt{10} < 3\sqrt{5} < 5 + \sqrt{10}$,
 即 $r_1 - r_2 < |C_1C_2| < r_1 + r_2$,
 故圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是相交.
 故答案为: 相交.

已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ 的公共弦长为2, 则实数 a 的值为 () .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- B. $\sqrt{3}$
D. $\sqrt{2}$

答案 A

解析 根据题意, 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$,

则有 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 \end{cases}$, 联立可得: $y = \frac{1}{a}$,

即两圆公共弦所在直线的方程为 $y = \frac{1}{a}$.

圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, 其圆心为 $(0, 0)$, 半径 $r = 2$,

若公共弦的弦长为2, 则圆 C_1 的圆心 C_1 到公共弦的距离 $d = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$,

又由 $a > 0$, 则有 $\frac{1}{a} = \sqrt{3}$, 解可得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选: A.

2. 圆锥曲线

15 焦点在 x 轴上, 短轴长为8, 离心率为 $\frac{3}{5}$ 的椭圆的标准方程是 () .

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
B. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

答案 C

解析 由题可知 $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

故选C.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，如果 C 上存在一点 Q ，使

$\angle F_1 Q F_2 = 120^\circ$ ，则椭圆的离心率 e 的取值范围为 () .

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

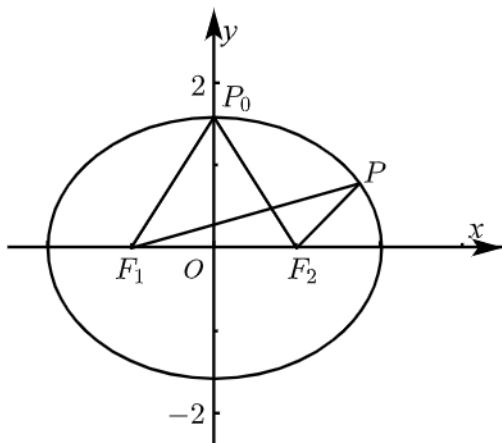
B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

答案 B

解析 如图，



当动点 P 在椭圆长轴端点处沿椭圆弧向短轴端点运动时， P 对两个焦点的张角 $\angle F_1 P F_2$ 渐渐增大，当且仅当 P 点位于短轴端点 P_0 处时，张角 $\angle F_1 P F_2$ 达到最大值。由些可得：

$$\because \triangle P_0 F_1 F_2 \text{ 中}, \angle F_1 P_0 F_2 \geq 60^\circ,$$

$$\because \text{Rt} \triangle P_0 O F_2 \text{ 中}, \angle O P_0 F_2 \geq 30^\circ,$$

$$\text{所以 } P_0 O \leq \sqrt{3} O F_2, \text{ 即 } b \leq \sqrt{3} c,$$

$$\therefore a^2 - c^2 \leq 3c^2, \text{ 可得 } a^2 \leq 4c^2,$$

$$\therefore \frac{c}{a} \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore 0 < e < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq e < 1.$$

故选 B .

17 已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，若

$\overrightarrow{P F_1} \cdot \overrightarrow{P F_2} = 0$ ，且 $\triangle P F_1 F_2$ 的面积为 4，则椭圆的方程为 _____ .

答案 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

解析 方法一：由焦点三角形 F_1PF_2 的面积 $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} (\theta = \angle F_1PF_2)$.

又由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $PF_1 \perp PF_2$,

则 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ = \theta$, 则 $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \tan 45^\circ = 4$, 解得 $b^2 = 4$.

又由 $\frac{c}{a} = e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$, 解得 $a^2 = 12$, $b^2 = 4$.

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

故答案为： $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

方法二：由题设可知，点 P 在椭圆上，则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

又由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 得 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$.

又由 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 4$, 则 $|PF_1| |PF_2| = 8$.

又由 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| |PF_2| = 4c^2 + 16 = 4a^2$, 解得 $b^2 = 4$.

又由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 解得 $a^2 = 12$.

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

故答案为： $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

18 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动

点，若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的3倍，则该双曲线的离心率为 () .

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\sqrt{2}$

答案 A

解析 由题意可得 $B(0, b)$, $F(c, 0)$,

设 $F'(-c, 0)$,

由双曲线的定义可得 $|PF| - |PF'| = 2a$, $|PF| = |PF'| + 2a$, $|BF| = |BF'| = \sqrt{b^2 + c^2}$,

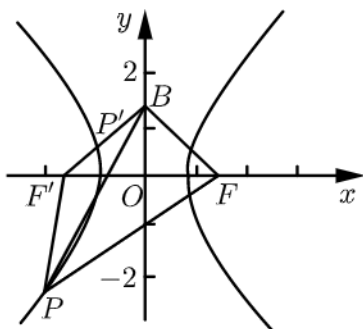
则 $\triangle BPF$ 的周长为 $|PB| + |PF| + |BF| = |PB| + |PF'| + 2a + |BF'| \geq 2|BF'| + 2a$,

当且仅当 B, P, F' 共线，取得最小值，且为 $2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$,

由题意可得 $6a = 2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 即 $4a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2 - a^2$, 即 $5a^2 = 2c^2$,

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选A .



- 19 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{6}, 0)$, 点 P 在 C 的一条渐近线上 , 若

$|PO| = |PF|$ (O 是原点) , 且 $\triangle POF$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 则 C 的方程是 () .

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$

答案 A

解析 $\because F(\sqrt{6}, 0), |PO| = |PF|$,

$$\therefore x_P = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, a^2 + b^2 = 6,$$

$$\text{令 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ 故 } y_P = \pm \frac{\sqrt{6}b}{2a},$$

$$\therefore S_{\triangle POF} = \frac{1}{2} |FO| \cdot |y_P| = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}b}{2a} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{故 } b = \frac{\sqrt{2}}{2}a, b^2 = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 = 6, \text{ 故 } a^2 = 4, b^2 = 2,$$

$$\text{则 } C \text{ 的方程是: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

故选: A .

- 20 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆

$x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 () .

A. $\sqrt{2}$

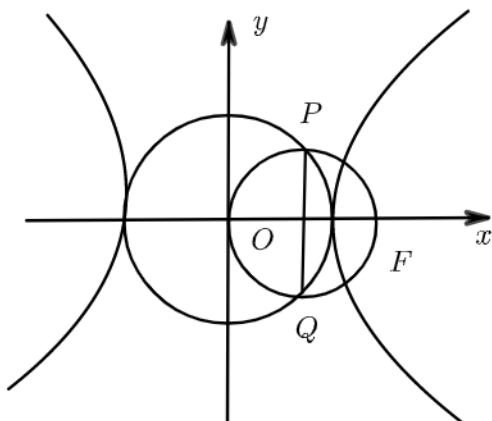
B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

答案 A

解析 如图，由题意，



知以 OF 为直径的圆的方程为 $\left[x - \frac{c}{2}\right]^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$ ①，

将 $x^2 + y^2 = a^2$ 记为②式，①-②得 $x = \frac{a^2}{c}$ ，

则以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的相交弦所在直线的方程为 $x = \frac{a^2}{c}$ ，所以

$$|PQ| = 2\sqrt{a^2 - \left[\frac{a^2}{c}\right]^2}.$$

由 $|PQ| = |OF|$ ，得 $2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{c}\right)^2} = c$ ，整理得 $c^4 - 4a^2c^2 + 4a^4 = 0$ ，

即 $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$ ，解得 $e = \sqrt{2}$ ，故选 A.

- 21 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点， M 是 C 上一点， FM 的延长线交 y 轴于点 N ，若 M 为 FN 的中点，则 $|FN| = \underline{\quad}$.

答案 6

解析 设 $N(0, a)$ ，已知 $F(2, 0)$ ，那么 $M\left(1, \frac{a}{2}\right)$ ，又点 M 在抛物线上，所以

$$\frac{a^2}{4} = 8 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{2}, \text{ 所以 } N(0, \pm 4\sqrt{2}), \text{ 那么 } |FN| = \sqrt{(2-0)^2 + (0 \pm 4\sqrt{2})^2} = 6$$

- 22 已知点 $A(2, 0)$ ，抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M ，与其准线相交于点 N ，则 $|FM| : |MN| = (\quad)$.

A. $2 : \sqrt{5}$

B. $1 : 2$

C. $1 : \sqrt{5}$

D. $1 : 3$

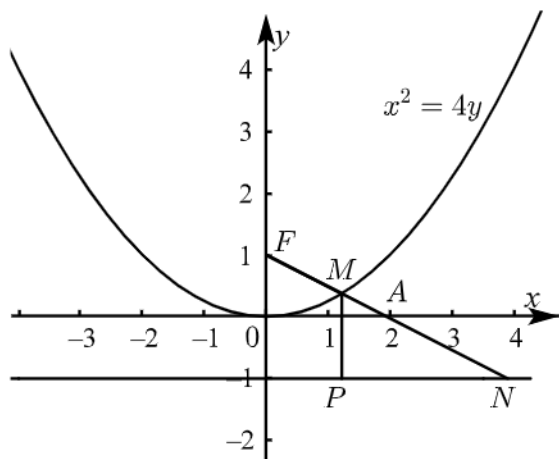
答案 C

解析

∵ 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 $F(0, 1)$ ，点 A 坐标为 $(2, 0)$ ，

∴ 抛物线的准线方程为 $l: y = -1$ ，直线 AF 的斜率为 $k = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$ ，

过 M 作 $MP \perp l$ 于 P ，根据抛物线定义得 $|FM| = |PM|$ ，



∴ 在 $\triangle MPN$ 中， $\tan \angle MNP = -k = \frac{1}{2}$ ，

∴ $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{2}$ ，可得 $|PN| = 2|PM|$ ，

得 $|MN| = \sqrt{|PN|^2 + |PM|^2} = \sqrt{5}|PM|$ ，

因此， $\frac{|PM|}{|MN|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，可得 $|FM| : |MN| = |PM| : |MN| = 1 : \sqrt{5}$ 。

故选：C。

23 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 交于 A, B 两点，点 F 为抛物线的焦点，若 $\triangle FAB$ 为直角三角形，则双曲线的离心率是 ()。

A. 3

B. $\sqrt{6}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

答案 B

解析

依题意知抛物线的准线 $x = -1$ 。

代入双曲线方程得 $y = \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ 。

不妨设 $A\left(-1, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$ ，

∴ $\triangle FAB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = 2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{6}.$$

故选B.

- 24 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(3, 4)$, 且双曲线的一个焦点与抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点重合, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

答案 A

解析 抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点为 $(5, 0)$,

则双曲线的焦点在 x 轴上,

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(3, 4)$, 可得 $3b = 4a$,

由题意双曲线的一个焦点与抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点重合, 可得 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$,

解得 $a = 3, b = 4$,

则双曲线的方程为: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

故选A.

- 25 已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右顶点, 点 M 在双曲线上,

$\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120° , 则该双曲线的标准方程为 ().

A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

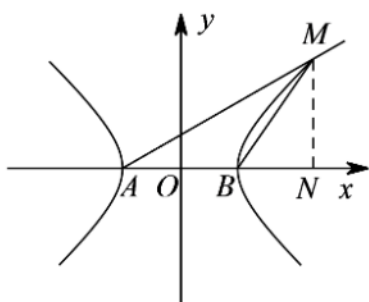
C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

D. $x^2 - y^2 = 1$

答案 D

解析

如图，



$$|AB| = |MB|, \angle ABM = 120^\circ,$$

过点 M 作 $MN \perp x$ 轴，垂足为 N ，则 $\angle MBN = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BMN$ 中， $|BM| = |AB| = 2a$ ， $\angle MBN = 60^\circ$ ，

$$\therefore |BN| = 2a \cos 60^\circ = a, |MN| = 2a \sin 60^\circ = \sqrt{3}a,$$

$\therefore M$ 点坐标为 $(2a, \sqrt{3}a)$ ，

代入双曲线方程可得 $\frac{4a^2}{a^2} - \frac{3a^2}{b^2} = 1$ ，即为 $a^2 = b^2$ ，

又 $\because A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ 为双曲线的左右顶点，

$$\therefore a = b = 1,$$

$\therefore$ 双曲线的标准方程为 $x^2 - y^2 = 1$ 。

- 26 斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 经过点 $F(1, 0)$ 交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点，若 $\triangle AOF$ 的面积是 $\triangle BOF$ 面积的 2 倍，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 $2\sqrt{2}$

解析 $\because S_{\triangle AOF} = 2S_{\triangle BOF}$ ，

$$\therefore y_A = -2y_B \text{ ①},$$

$\therefore$ 设 AB 的方程为 $x = my + 1$ ($m > 0$)，

与 $y^2 = 4x$ 联立消去 x 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，

$$\therefore y_A + y_B = 4m \text{ ②}, y_A y_B = -4 \text{ ③},$$

$$\text{由 ①②③ 可得 } m = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2}.$$

故答案为 $2\sqrt{2}$ 。

27 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$.

A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

B. 6

C. 12

D. $7\sqrt{3}$

答案 C

解析

方法一: $\because y^2 = 3x$,

$\therefore$ 焦点为 $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 准线为 $x = -\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 直线方程为 $y = \tan 30^\circ \left(x - \frac{3}{4}\right)$,

$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow 16x^2 - 168x + 9 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{168}{16} = \frac{21}{2},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{21}{2} + \frac{3}{4} \times 2$$

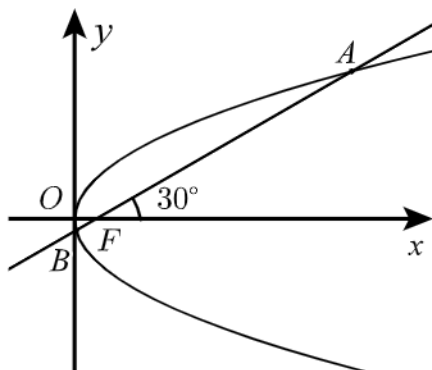
$$= 12.$$

故选C.

$$\text{方法二: } |AF| = \frac{p}{1 - \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 3(2 + \sqrt{3}),$$

$$|BF| = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = 3(2 - \sqrt{3}),$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = 3(2 + \sqrt{3}) + 3(2 - \sqrt{3}) = 12.$$



28 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ，过焦点的直线分别交抛物线于 A, B 两点，分别过 A, B 作 l 的垂线，垂足为 C, D ，若 $|AF| = 3|BF|$ ，且三角形 CDF 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 p 的值为 () .

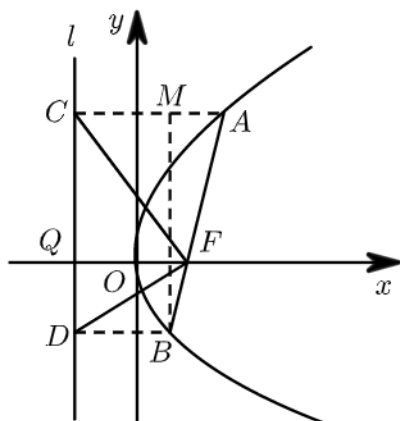
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

答案 C

解析 过点 B 作 $BM \parallel l$ ，交直线 AC 于点 M ，交 x 轴于点 N ，

如图所示，



设点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

由 $|AF| = 3|BF|$ ，得 $x_1 + \frac{p}{2} = 3\left(x_2 + \frac{p}{2}\right)$ ，

即 $x_1 - 3x_2 = p$ ，①

又 $|QF| = |QN| + |NF|$

$$= |BD| + \frac{1}{4}|AM|$$

$$= x_2 + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)$$

$$= p,$$

$$\therefore x_1 + 3x_2 = 4p, \text{ ②}$$

由①②解得 $x_1 = \frac{5}{2}p$ ， $x_2 = \frac{1}{2}p$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，

$$|AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{5}{2}p + \frac{1}{2}p + p$$

$$= 4p,$$

$$|AM| = x_1 - x_2$$

$$= \frac{5}{2}p - \frac{1}{2}p$$

$$= 2p ,$$

$$\therefore |BM| = \sqrt{(4p)^2 - (2p)^2} = 2\sqrt{3}p ,$$

$$\therefore \triangle CDF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}p \cdot p = \sqrt{3} ,$$

$$\text{解得 } p = \frac{\sqrt{6}}{2} .$$

故选C .