

03三角函数与解三角形练习册

1. 三角函数定义与诱导公式

1 已知： $\sin(\theta + 3\pi) = -\frac{2}{3}$ ，则

$$\frac{\tan(-5\pi - \theta) \cdot \cos(\theta - 2\pi) \cdot \sin(-3\pi - \theta)}{\tan(\frac{7\pi}{2} + \theta) \cdot \sin(-4\pi + \theta) \cdot \cot(-\theta - \frac{\pi}{2})} + 2 \tan(6\pi - \theta) \cdot \cos(-\pi + \theta) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

答案 2

解析 原式 = $\frac{-\tan \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{-\cot \theta \cdot \sin \theta \cdot \tan \theta} + 2(-\tan \theta)(-\cos \theta) = 3 \sin \theta = 3 \times \frac{2}{3} = 2 .$

2. 三角恒等变换

2 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ， $\cos(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，且 $0 < \beta < \alpha < \pi$ ，则 $\cos \beta = (\quad)$.

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ D. $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$

答案 A

解析 已知 $0 < \beta < \alpha < \pi$ ，
 所以 $-\pi < \beta - \alpha < 0$ ，
 由于 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ，
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，
 从 $\cos(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，
 则 $\sin(\beta - \alpha) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，
 所以 $\cos \beta = \cos[\alpha + (\beta - \alpha)]$
 $= \cos \alpha \cos(\beta - \alpha) - \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$
 $= \frac{5\sqrt{3}}{9} .$

故选A.

3 若 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值是 ().

A. $-\frac{1}{4}$

B. $-\frac{7}{8}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

答案 B

解析 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{7}{8}$.

故选B.

3. 三角函数图像性质

4 为得到函数 $y = \sin(\pi - 2x)$ 的图象, 可以将函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 ().

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

答案 B

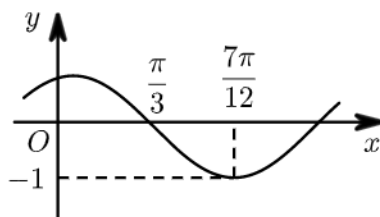
解析 $y = \sin(\pi - 2x) = \sin 2x$,

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

因此向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位即可得.

5 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示, 为了得到函数

$g(x) = \sin \omega x$ 的图象, 只需将 $f(x)$ 的图象上所有点 ().



A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

答案 C

解析

由函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象知: $A = 1$,

设 $f(x)$ 周期为 T , 则 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

由图知: 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x) = 0$, 即 $\sin(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi) = 0$,

$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \pi, \varphi = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

将函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 可得函数 $g(x) = \sin 2x$ 的图象.

6 已知函数 $f(x) = \cos x - |\sin x|$, 那么下列说法错误的是 ().

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上恰有一个零点

C. $f(x)$ 是周期函数

D. $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上是增函数

答案 D

解析

A. $f(x) = \cos x - |\sin x|$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 定义域关于原点对称

$f(-x) = \cos(-x) - |\sin(-x)| = \cos x - |-\sin x| = \cos x - |\sin x| = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是偶函数, 故A正确;

B. 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $\sin x \leq 0$,

$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$,

令 $f(x) = 0$ 得, $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0, x + \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

又 $x \in [-\pi, 0]$,

$\therefore x = -\frac{\pi}{4}$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上有且仅有一个零点 $-\frac{\pi}{4}$, 故B正确;

C. $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - |\sin(x + 2\pi)| = \cos x - |\sin x| = f(x)$,

$\therefore 2\pi$ 是 $f(x)$ 的周期, $f(x)$ 一定是周期函数, 故C正确.

故选D.

7 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程.

(2) 若对任意的 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) - m - 2 \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案

(1) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

(2) $m \geq -\frac{1}{2}$.

解析

(1) $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$,

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$f(x) \in \left[0, \frac{3}{2}\right],$$

因为 $f(x) - m - 2 \leq 0$, 即 $f(x) \leq m + 2$ 恒成立.

故 $m + 2 \geq \frac{3}{2}$, 解得 $m \geq -\frac{1}{2}$.

4. 解三角形

8 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别是 a, b, c , 若 $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c-a}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 ().

A. 直角三角形

B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等边三角形

答案

A

解析

$$\therefore \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c-a}{2c},$$

$$\therefore \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{\sin C - \sin A}{2 \sin C}$$

$$\Rightarrow \sin A = \cos B \sin C = \frac{1}{2} [\sin(C+B) + \sin(C-B)]$$

$$\Rightarrow 2 \sin A = \sin A + \sin(C - B)$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin(C - B)$$

$$\Rightarrow A + (C - B) = \pi \text{ (舍) 或 } A = C - B,$$

$$\therefore A + B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ 为直角三角形.}$$

9 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $a^2 - b^2 - c^2 + \sqrt{3}bc = 0$, $2b \sin A = a$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{14}$.

(1) 求角 A 和角 B 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

(1) $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{6}$.

(2) $2\sqrt{3}$.

解析

(1) 由 $a^2 - b^2 - c^2 + \sqrt{3}bc = 0$ 得 $a^2 - b^2 - c^2 = -\sqrt{3}bc$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}, A = \frac{\pi}{6}.$$

由 $2b \sin A = a$, 得 $2 \sin B \sin A = \sin A$, 则 $\sin B = \frac{1}{2}$,

又 $A = \frac{\pi}{6}$, 故 $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由(1)知 $AC = BC$, 设 $AC = BC = x$,

在 $\triangle AMC$ 中, 由余弦定理得 $AM^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} - 2x \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{14})^2$, 解得

$$x = 2\sqrt{2},$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

10 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $2c = \sqrt{3}a + 2b \cos A$.

(1) 求角 B .

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{4}$, 求 $\sin(2A + B)$ 的值.

(3) 若 $c = 7$, $b \sin A = \sqrt{3}$, 求 b 的值.

答案

(1) $\frac{\pi}{6}$.

$$(2) \frac{3\sqrt{5}-7}{16}.$$

$$(3) \sqrt{19}.$$

解析

$$(1) \triangle ABC \text{ 中, } 2c = \sqrt{3}a + 2b \cos A,$$

由正弦定理得

$$2 \sin C = \sqrt{3} \sin A + 2 \sin B \cos A,$$

$$\text{又 } C = \pi - (A + B),$$

$$\text{所以 } 2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = \sqrt{3} \sin A + 2 \sin B \cos A,$$

$$\text{所以 } 2 \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin A,$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin A \neq 0,$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 若 } \cos A = \frac{1}{4}, A \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8},$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8},$$

$$\text{所以 } \sin(2A + B) = \sin 2A \cos B + \cos 2A \sin B = \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}-7}{16}.$$

$$(3) \text{ 若 } c = 7, b \sin A = \sqrt{3},$$

$$\text{由 } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\text{得 } a \sin B = b \sin A = \sqrt{3},$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$= 49 + 12 - 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 19,$$

$$\text{解得 } b = \sqrt{19}.$$

11

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B = \sqrt{6} \sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

答案

$$(1) \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$(2) = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}.$$

解析

$$(1) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}, \sin B = \sqrt{6} \sin C,$$

$$\text{得 } b = \sqrt{6}c,$$

$$\text{又由 } a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b, \text{ 得 } a = 2c,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 得 } \sin A = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{1}{4},$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-1}{8}.$$