

03三角函数与解三角形

1. 三角函数定义与诱导公式

1 若 $\tan \theta = 3$ ，则 $2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta =$ _____.

答案 $\frac{7}{5}$

解析 思路一：求解 $\sin \theta, \cos \theta$

根据同角关系： $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$$\tan \theta = 3 \Rightarrow \sin \theta = 3 \cos \theta$$

$$\text{又因为 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ 或 } \sin \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{所以 } 2\sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta - \cos^2 \theta = \frac{18}{10} - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{5}$$

思路二，切化弦

根据同角关系， $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$$\tan \theta = 3 \Rightarrow \sin \theta = 3 \cos \theta$$

整个式子除以1，并把1用 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ 表示，将问题中的 $\sin \theta$ 用 $\cos \theta$ 表示，所以

$$2\sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta - \cos^2 \theta = \frac{18\cos^2 \theta - 3\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{9\cos^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{7}{5}$$

思路三：弦化切

根据同角关系 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

整个式子除以1，并把1转化 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ，将分子分母同除以 $\cos^2 \theta$

$$\text{所以 } 2\sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta - \cos^2 \theta = \frac{2\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2\tan^2 \theta - \tan \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{7}{5}.$$

2 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，则 $\sin \theta - \cos \theta$ 的值为_____.

答案 $-\frac{1}{5}$

解析

$$\begin{aligned}\because \sin \theta + \cos \theta &= \frac{7}{5}, \\ \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \frac{49}{25}, \\ \text{即 } 1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta &= \frac{49}{25}, \\ 2 \sin \theta \cdot \cos \theta &= \frac{24}{25}, \\ \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{25}, \\ \therefore \theta &\in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \\ \therefore \cos \theta &> \sin \theta, \\ \therefore \sin \theta - \cos \theta &= -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

3

化简：
$$\frac{\tan(\pi + \alpha) \cos(2\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(-\alpha - 3\pi) \sin(-3\pi - \alpha)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案

-1

解析

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\tan \alpha \cos \alpha \sin\left[-2\pi + \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos(3\pi + \alpha) [-\sin(3\pi + \alpha)]} \\ &= \frac{\tan \alpha \cos \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{(-\cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha \cos \alpha \cos \alpha}{(-\cos \alpha) \sin \alpha} = -\frac{\tan \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -1.\end{aligned}$$

故答案为：-1.

2. 三角恒等变换

4

已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ，且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = -\frac{1}{7}$ ，则 $2\alpha - \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案

$-\frac{3\pi}{4}$

解析

$$\begin{aligned}\because \tan \alpha &= \tan[(\alpha - \beta) + \beta] = \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{3} > 0, \\ \text{且 } \alpha &\in (0, \pi), \therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \text{ 又 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} > 0, \\ \therefore 0 < 2\alpha &< \frac{\pi}{2}. \therefore \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1.\end{aligned}$$

$$\because \tan \beta = -\frac{1}{7} < 0, \beta \in (0, \pi), \therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \therefore -\pi < 2\alpha - \beta < 0, \therefore 2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.$$

5 设 α 与 β 均为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 则 $\cos \beta$ 的值为().

- A. $\frac{71}{98}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{71}{98}$ 或 $\frac{1}{2}$ D. $\frac{71}{98}$ 或 $\frac{59}{98}$

答案 B

解析 α, β 锐角.

$$\text{由 } \cos \alpha = \frac{1}{7} \text{ 得 } \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$\text{由 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14} \text{ 得 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}.$$

$$\therefore \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha]$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha$$

$$= -\frac{11}{14} \times \frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

故选B.

6 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, 则 $\cos 2\theta$ 的值为().

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{7}{16}$ C. $\pm \frac{1}{8}$ D. $\frac{13}{16}$

答案 A

解析 因为 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{8}$.

故选A.

7 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 =$ _____.

答案 2

解析

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1}{1} \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{1 + 2 \tan \alpha + 1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{2 + 4 + 4}{1 + 4} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

3. 三角函数图像性质

8 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若对满足

$|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 ，有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\varphi = ()$.

A. $\frac{5\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 D

解析 由题意可得， $g(x)$ 由 $f(x)$ 平移得到，两函数周期为 π ，最小值为 -1 ，最大值为 1 ，若需满足

$$|f(x_1) - g(x_2)| = 2, \text{ 则 } \begin{cases} f(x_1) = 1 \\ g(x_2) = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x_1) = -1 \\ g(x_2) = 1 \end{cases},$$

若 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$ ，可以得到 $f(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 两函数峰值间距为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ ，

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

故选：D .

9 设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，其中 $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$ ， $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$ ，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π ，则 () .

A. $\omega = \frac{2}{3}$ ， $\varphi = \frac{\pi}{12}$ B. $\omega = \frac{2}{3}$ ， $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$ C. $\omega = \frac{1}{3}$ ， $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$ D. $\omega = \frac{1}{3}$ ， $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

答案 A

解析 由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π ，得 $\frac{T}{4} > \frac{\pi}{2}$ ，

$$\text{又 } f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0, \text{ 得 } \frac{T}{4} = \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\therefore T = 3\pi, \text{ 则 } \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi, \text{ 即 } \omega = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \varphi\right)$$

$$\therefore \text{由 } f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{8} + \varphi\right) = 2, \text{ 得 } \sin\left(\varphi + \frac{5\pi}{12}\right) = 1.$$

$$\therefore \varphi + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{取 } k = 0, \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{12} < \pi.$$

$$\therefore \omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}.$$

故选A.

- 10 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. π

D. 2π

答案 C

解析 方法一: $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right).$

$$\text{令 } f(x) = 1, \text{ 则 } \omega x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{则 } \omega|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi, \text{ 故 } \omega = 2, \text{ 最小正周期为 } \pi.$$

$$\text{方法二: } f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 由 } 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = 1, \text{ 得}$$

$$\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 设 } x_1, x_2 \text{ 分别为距离最小的相邻交点的横坐标, 则 } \omega x_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\omega x_2 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 两式相减, 得 } x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \omega = 2, \text{ 故}$$

$$f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的最小正周期为 } \pi.$$

故选C.

- 11 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2\frac{\omega x}{2}$ 其中 $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间.

答案

- (1) 值域为 $[-3, 1]$.
 (2) 单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

解析

$$(1) \quad f(x) = \sin \omega x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \omega x \times \frac{1}{2} + \sin \omega x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \omega x \times \frac{1}{2} - (1 + \cos \omega x) \\ = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x - 1 = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3, 1]$

$$(2) \quad \text{由 } \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \omega = 2$$

$$\text{所以 } f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{得 } -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

12 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x - 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间 .
 (2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值, 并求出取得最值时的 x 值 .

答案

$$(1) \quad \left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z} .$$

$$(2) \quad x = \frac{5\pi}{12} \text{ 时, 函数取得最小值为 } -3 .$$

$$x = 0 \text{ 时, 函数取得最大值为 } \sqrt{3} - 1 .$$

解析

$$(1) \quad \text{函数 } f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x - 1 = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x - 1 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 ,$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 求得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, \text{ 可得函数的增区间为 } \\ \left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z} .$$

(2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数

$$g(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \text{ 的图象,}$$

$$\text{在区间 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上, } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \text{ 故当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \pi \text{ 时, 即 } x = \frac{5\pi}{12} \text{ 时, 函数取得最}$$

$$\text{小值为 } -2 - 1 = -3 .$$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 时, 即 $x = 0$ 时, 函数取得最大值为 $\sqrt{3} - 1$.

4. 解三角形

13 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 若 $a \cdot \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 等腰三角形
B. 直角三角形
C. 等腰三角形或直角三角形
D. 等腰直角三角形

答案 C

解析 在 $\triangle ABC$ 中, $\because a \cdot \cos A = b \cos B$,

∴由正弦定理得： $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ，

即 $\sin 2A = \sin 2B$,

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A = \pi - 2B,$$
$$\therefore A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore \triangle ABC$ 的形状为等腰三角形或直角三角形.

故选：C．

14 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 且 $a \cos B + a \cos C = b + c$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

- A. 等边三角形 B. 锐角三角形 C. 钝角三角形 D. 直角三角形

答案 D

解析 解法1：

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$= a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2 \cdot b + b \cdot c^2 - b^3 + b^2 \cdot c + a^2 \cdot c - c^3}{2bc} \\
 &= \frac{a^2(b+c) + bc(b+c) - b^3 - c^3}{2bc} \\
 &= \frac{a^2(b+c) + bc(b+c) - (b+c)(b^2 - bc + c^2)}{2bc}
 \end{aligned}$$

$$= b + c,$$

$$\therefore b + c > 0,$$

$$\therefore a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 2bc,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2,$$

故选D.

解法2:

由 $a \cos B + a \cos C = b + c$ 可知, $\angle B, \angle C$ 不可能为钝角,

过点 C 向 AB 作垂线, 垂足为 D ,

则 $a \cos B = BD \leq BA = c$, 同理 $a \cos C \leq b$,

$$\therefore a \cos B + a \cos C \leq b + c,$$

$$\text{又} \because a \cos B + a \cos C = b + c,$$

$$\therefore a \cos B = c, a \cos C = b,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ.$$

故选D.

15 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a \cos A - b \cos B = 0$, 则三角形的形状是 ().

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

答案 D

解析

$$\begin{aligned}
 \text{法1: } \because \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\
 \therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot a &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot b,
 \end{aligned}$$

$$\text{化简得: } a^2 c^2 - a^4 = b^2 c^2 - b^4, \text{ 即 } (a^2 - b^2)c^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2),$$

①若 $a^2 - b^2 = 0$ 时, $a = b$, 此时 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

②若 $a^2 - b^2 \neq 0$, $a^2 + b^2 = c^2$, 此时 $\triangle ABC$ 是直角三角形,

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形；

法2：根据正弦定理可知 $\because a \cos A = b \cos B$ ，

$$\therefore \sin A \cos A = \sin B \cos B,$$

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B,$$

$$\therefore A = B, \text{ 或 } 2A + 2B = 180^\circ \text{ 即 } A + B = 90^\circ,$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰或直角三角形。

故选D。

16 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边， $a = 2$ ，且

$(2 + b)(\sin A - \sin B) = (c - b) \sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____。

答案 $\sqrt{3}$

解析 由 $a = 2$ 知， $(a + b)(\sin A - \sin B) = (c - b) \sin C$ ，

由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

$$\text{于是 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } b^2 + c^2 - bc = a^2 = 4 \geq 2bc - bc = bc,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \sqrt{3}.$$

17 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A}$ 。

(1) 求角 A 的大小。

(2) 若 $a = \sqrt{7}$ ， $b = 2c$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

答案 (1) $\frac{2\pi}{3}$
(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析 (1) 由正弦定理， $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A} = \frac{b+c}{b+a}$ 。

$$\text{故 } (a-b)(b+a) = c(b+c), \text{ 即 } a^2 - b^2 = bc + c^2,$$

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 + bc, \text{ 故由余弦定理}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}, A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 由 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ 代入 $a = \sqrt{7}$, $b = 2c$,

可以解得 $b = 2$, $c = 1$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin B = \sqrt{2}b$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = 6$, $b + c = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

(1) $\angle A = \frac{\pi}{4}$.

(2) $7(\sqrt{2} - 1)$.

解析

(1) 在 $\triangle ABC$ 中: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

则 $a \sin B = b \sin A$.

$\therefore 2a \sin B = \sqrt{2}b$,

$\therefore 2 \sin A \cdot \sin B = \sqrt{2}b$,

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore 0 < \angle A < \pi$,

$\therefore \angle A = \frac{\pi}{4}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$,

条件中 $a = 6$, 且 $b + c = 8$, $\angle A = \frac{\pi}{4}$,

并且 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2 + c^2 - 6^2}{2bc}$,

$\therefore b^2 + c^2 - 36 = \sqrt{2}bc$.

$\therefore (b + c)^2 - 2bc = b^2 + c^2$,

$\therefore (b + c)^2 - 2bc - 36 = \sqrt{2}bc$,

$\therefore bc = \frac{8^2 - 36}{2 + \sqrt{2}}$,

$\therefore bc = 14(2 - \sqrt{2})$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 14(2 - \sqrt{2}) = 7(\sqrt{2} - 1)$.

19 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边, 且 $\frac{a}{b} = \frac{\cos A}{2 - \cos B}$.

- (1) 求 $\frac{a}{c}$.
- (2) 若 $b = 4, \cos C = \frac{1}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
- (3) 在 (II) 的条件下, 求 $\cos(2C + \frac{\pi}{3})$ 的值.

答案

- (1) $\frac{1}{2}$.
- (2) $\sqrt{15}$.
- (3) $-\frac{7+3\sqrt{5}}{16}$.

解析

$$(1) \because \frac{a}{b} = \frac{\cos A}{2 - \cos B}, \therefore 2a - a \cos B = b \cos A,$$

由正弦定理得 $2 \sin A = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin(A+B) = \sin C$,

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } c = 2a, \therefore \cos C = \frac{1}{4} \text{ 且 } C \text{ 为三角形的内角,}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

由余弦定理, 可得 $c^2 = 4a^2 = a^2 + 16 - 2a \times 4 \times \frac{1}{4}$,

$$\therefore 3a^2 + 2a - 16 = 0, \text{ 解得 } a = 2 \text{ 或 } a = -\frac{8}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}.$$

故答案为: $\sqrt{15}$.

$$(3) \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -\frac{7}{8},$$

$$\cos\left(2C + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2C \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2C \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \left(-\frac{7}{8}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{7+3\sqrt{5}}{16}.$$

故答案为: $-\frac{7+3\sqrt{5}}{16}$.