

01导数练习册

1.导数的几何意义

1 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0 - 3x)}{x}$ 等于 ().

- A. $2f'(x_0)$
- B. $f'(x_0)$
- C. $3f'(x_0)$
- D. $4f'(x_0)$

答案 D

解析

由 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $(x_0 + x) - (x_0 - 3x) = 4x$,
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0 - 3x)}{x} = 4f'(x_0)$.

故选 D.

2 函数 $f(x) = g(x) + x^2$, 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为 () .

- A. 4 B. $-\frac{1}{4}$ C. 2 D. $-\frac{1}{2}$

答案 A

解析 $f'(x) = g'(x) + 2x$.

在 $(1, g(1))$ 处.

$$f'(x) = 2 + 2x = 4 .$$

在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为4.

故选A.

3 与曲线 $y = x^3 - 5x$ 相切且过原点的直线的斜率为 () .

A. 2

B. -5

C. -1

D. -2

答案 B

解析

设切点坐标为 $P(x_0, y_0)$,

由曲线 $y = f(x) = x^3 - 5x$,

得 $f'(x) = 3x^2 - 5$,

所以过原点的切线斜率为 $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 5$,

所以切线方程 $y - y_0 = (3x_0^2 - 5)(x - x_0)$,

又切线过原点 $O(0, 0)$,

所以 $-x_0^3 + 5x_0 = -3x_0^3 + 5x_0$,

解得 $x_0 = 0$,

所以 $y_0 = 0$, 则 $P(0, 0)$;

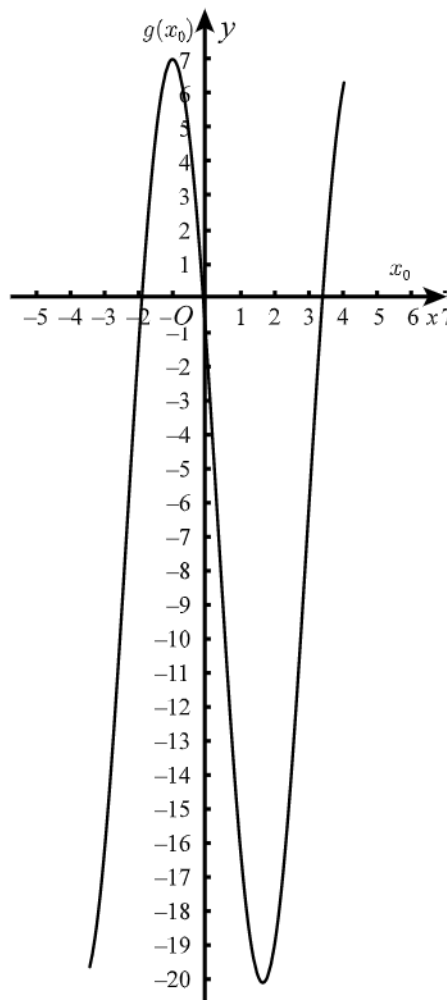
所以与曲线 $y = x^3 - 5x$ 相切且过原点的直线的斜率为 $k = f'(0) = -5$.

故选B .

4 若过点 $P(-1, m)$ 可作曲线 $f(x) = -x^3 + 6x^2$ 的三条切线 , 则实数 m 的取值范围为 _____ .

答案 $(-20, 7)$

解析



$f'(x) = -3x^2 + 12x$ ，设切点为 $Q(x_0, y_0)$ ，则 $y_0 = -x_0^3 + 6x_0^2$ ，过切点的直线的斜率

$$k = f'(x_0) = -3x_0^2 + 12x_0,$$

结合过切点 $Q(x_0, y_0)$ 和 $P(-1, m)$ 的直线的斜率 $k_{PQ} = \frac{y_0 - m}{x_0 + 1}$ ，则

$$\begin{cases} y_0 = -x_0^3 + 6x_0^2 \\ -3x_0^2 + 12x_0 = \frac{y_0 - m}{x_0 + 1} \end{cases},$$

所以 $m = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 12x_0$ ，令 $g(x_0) = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 12x_0$ ，

则 $g'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = 6(x_0 - 2)(x_0 + 1)$ ，令 $g'(x_0) = 0$ ，

解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$ ，当 $x_0 < -1$ 时， $g'(x_0) > 0$ ，

所以 $g(x_0)$ 单调递增。

当 $-1 < x_0 < 2$ 时， $g'(x_0) < 0$ 时，

所以 $g(x_0)$ 单调递减。

当 $x_0 > 2$ 时， $g'(x_0) > 0$ 时，

所以 $g(x_0)$ 单调递增。

画出函数 $g(x_0)$ 的大致图象如图所示，当 $x_0 = -1$ 时， $g(x_0) = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 12x_0$ 取得极大值

$$g(-1) = 7,$$

当 $x_0 = 2$ 时 ,

$$g(x_0) = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 12x_0 \text{ 取得极小值 } g(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 12 \times 2 = -20 ,$$

所以若 $m = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 12x_0$ 有三个不同的零点 , 则 $-20 < m < 7$.

5 函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线为 : $y = -2x + 5$, 则 $f(2) + f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 -1

解析 由题意知 ,

$$f(2) = -2 \times 2 + 5 = 1$$

$$f'(2) = -2$$

$$\therefore f(2) + f'(2) = -1 .$$

6 若曲线 $f(x) = ax^3 + \ln(-2x)$ 存在垂直于 y 轴的切线 , 则实数 a 取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $(0, +\infty)$

解析 $\because f'(x) = 3ax^2 + \frac{1}{x} (x < 0)$,

$\therefore$ 曲线 $f(x) = ax^3 + \ln(-2x)$ 存在垂直于 y 轴的切线 ,

$$\therefore f'(x) = 3ax^2 + \frac{1}{x} = 0 \text{ 有负解 ,}$$

$$\text{即 } a = -\frac{1}{3x^3} \text{ 有负解 ,}$$

$$\therefore -\frac{1}{3x^3} > 0 ,$$

$$\therefore a > 0 ,$$

故答案为 $(0, +\infty)$.

2. 导数运算

7 已知 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{2x}}$, 则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = (\quad)$.

A. $-2 - \ln 2$

B. $-2 + \ln 2$

C. $2 - \ln 2$

D. $2 + \ln 2$

答案 D

解析

$$\begin{aligned}\because f(x) &= \frac{\ln x}{\sqrt{2x}}, \\ \therefore f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\sqrt{2x} - \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x} \\ &= \frac{2 - \ln x}{(2x)^{\frac{3}{2}}}, \\ \therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2 - \ln \frac{1}{2}}{(1)^{\frac{3}{2}}} = 2 + \ln 2.\end{aligned}$$

故选D.

8 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为 ().

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

答案 C

解析

$$\begin{aligned}\text{函数 } f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \ln x \text{ 的导函数为 } f'(x) = x - \frac{1}{x}, \\ \text{故 } f'(1) &= 1 - \frac{1}{1} = 0.\end{aligned}$$

故选: C

9 已知函数 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0) = ()$

A. 0

B. -4

C. -2

D. 2

答案 B

解析

$$\because f'(x) = 2x + 2f'(1), \text{ 故 } f'(1) = 2 + 2f'(1), \therefore f'(1) = -2, \text{ 则 } f'(0) = 2f'(1) = -4$$

3. 导数的应用

10 若函数 $f(x) = e^x - (a-1)x + 1$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(e+1, +\infty)$

B. $[e+1, +\infty)$

C. $(e-1, +\infty)$

D. $[e-1, +\infty]$

答案 B

解析 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = e^x - a + 1 \leq 0$,

$$\therefore a \geq (e^x + 1)_{\max},$$

$$\because e^x + 1 < e + 1,$$

$$\therefore a > e + 1,$$

故选B.

11 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 其导函数为 $f'(x)$, 对定义域内的任意 x , 都有 $2f(x) + xf'(x) > 2$ 成立, 则不等式 $x^2 f(x) - 4f(2) < x^2 - 4$ 的解集为 _____ .

答案 $(-2, 0) \cup (0, 2)$

解析 当 $x > 0$ 时, 由 $2f(x) + xf'(x) > 2$ 得, $2xf(x) + x^2 f'(x) - 2x > 0$,

$$\text{即 } (x^2)' [f(x) - 1] + x^2 [f(x) - 1]' = [x^2 (f(x) - 1)]' > 0,$$

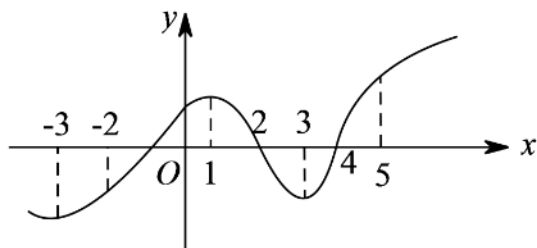
令 $g(x) = x^2 [f(x) - 1]$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上也为偶函数,

且当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$ 总成立, $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$$x^2 f(x) - 4f(2) < x^2 - 4 \text{ 可化为 } g(|x|) < g(2), \text{ 则 } |x| < 2,$$

又 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 解得 $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

12 如图, 是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象, 则下面判断正确的是 () .



- A. 在区间 $(-2, 1)$ 上 $f(x)$ 是增函数
 B. 在 $(1, 3)$ 上 $f(x)$ 是减函数
 C. 在 $(4, 5)$ 上 $f(x)$ 是增函数
 D. 当 $x = 4$ 时, $f(x)$ 取极大值

答案 C

解析 由于 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 单调递增; $f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 单调递减, 观察 $f'(x)$ 的图象可知,
 A选项: 当 $x \in (-2, 1)$ 时, 函数先递减, 后递增, 故A错误;
 B选项: 当 $x \in (1, 3)$ 时, 函数先增后减, 故B错误;
 C选项: $x \in (4, 5)$ 时函数递增, 故C正确;
 D选项: 由函数的图象可知函数在4处取得函数的极小值, 故D错误;
 故选C.

13 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值10, 则复数 $z = a + bi$ 对应的点 z 所在的象限为 () .

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

答案 B

解析 $\because f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2,$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 2ax - b.$$

由题得,

$$\begin{cases} f(1) = 1 - a - b + a^2 = 10 \\ f'(1) = 3 - 2a - b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases},$$

经检验 $a = 3, b = -3$ 时不成立,

$$\therefore z = -4 + 11i,$$

$\therefore z$ 在第二象限.

故选B.

14 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ 在区间 $(a, a+5)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-5, 0)$

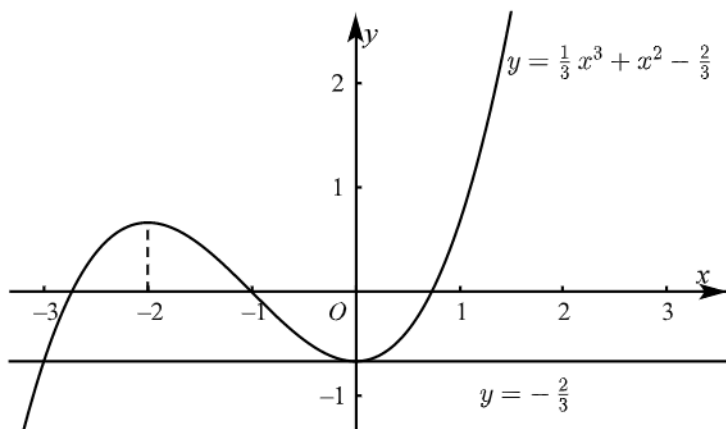
B. $(-5, 0)$

C. $[-3, 0)$

D. $(-3, 0)$

答案 C

解析 由题意, $f'(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-2, 0)$ 上是减函数, 作出其图象如图所示,



$$\text{令 } \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, x = 0 \text{ 或 } x = -3, \text{ 则结合图象可知, } \begin{cases} -3 \leq a < 0 \\ a+5 > 0 \end{cases},$$

解得 $a \in [-3, 0)$,

故选C.

15 已知函数 $f(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right)$, 其中 $a \geq -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

答案

① 当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$; 单调递增区间为 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

② 当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, $\left(\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$; 单调递增区间为 $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{a+1}\right)$.

③ 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 为常值函数, 不存在单调区间.

④ 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{a+1})$; 单调递增区间为 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$.

解析

$$f(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right), x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{ax} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{x} + a + 1\right) + e^{ax} \cdot \frac{-a}{x^2} \\ &= ae^{ax} \left(\frac{a}{x} + a + 1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= ae^{ax} \frac{(a+1)x^2 + ax - 1}{x^2} \\ &= ae^{ax} \frac{(x+1)[(a+1)x - 1]}{x^2}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\because x^2 > 0, e^{ax} > 0,$$

$$\therefore f'(x) = ae^{ax} \frac{(x+1)[(a+1)x - 1]}{x^2} \text{ 在 } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ 上的符号情况,}$$

等价于 $g(x) = a(x+1)[(a+1)x - 1]$ 在 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的符号情况.

当 $a = 0$ 时, $g(x) = 0$ 为常函数,

当 $a = -1$ 时, $g(x) = x + 1$ 为一次函数,

当 $a \neq 0, -1$ 时, $g(x) = a(x+1)[(a+1)x - 1]$ 为二次函数,

$$\text{令 } g(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{a+1},$$

$$\text{又 } a \geq -1, \text{ 故 } -1 < 0 < \frac{1}{a+1},$$

① $a = 0$ 时,

在 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上,

$g(x) = 0, f'(x) = 0, f(x)$ 为常函数, 不存在单调区间.

② 当 $a = -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$.

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$; 单调递增区间为 $(-1, 0), (0, +\infty)$,

当 $a \neq 0, -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{a+1}$.

③ 当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1), (\frac{1}{a+1}, +\infty)$; 单调递增区间为 $(-1, 0), (0, \frac{1}{a+1})$;

④ 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0), (0, \frac{1}{a+1})$; 单调递增区间为 $(-\infty, -1), (\frac{1}{a+1}, +\infty)$.

16 已知函数 $f(x) = x(e^{2x} - m) - \ln x - 1$.

(1) 若 $m = 0$, 求证: $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数.

- (2) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 恒有 $[g(x_1) - 1] \cdot [g(x_2) - 1] > 0$, 求实数 m 的取值范围.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $(-\infty, 1)$.

解析

(1) $f(x) = x \cdot e^{2x} - \ln x - 1$,

$$f'(x) = e^{2x} + 2x \cdot e^{2x} - \frac{1}{x} = e^{2x}(1 + 2x) - \frac{1}{x},$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(1 + 2x) + e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= 4e^{2x}(1 + x) + \frac{1}{x^2}.$$

$$\because x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

$$\therefore f''(x) > 0 \text{ 在 } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore f'(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore f'(x)_{\min} = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e - 2 > 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上单调递增, 命题得证.}$$

$$(2) g(x) = \frac{f(x)}{x} = e^{2x} - m - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = e^{2x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - m (x > 0),$$

$$g'(x) = 2e^{2x} - \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 e^{2x} + \ln x}{x^2} (x > 0),$$

要使 $[g(x_1) - 1][g(x_2) - 1] > 0$ 恒成立,

则在 $(0, +\infty)$ 上, $g(x)_{\min} > 1$,

$$\text{令 } h(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x,$$

$$h'(x) = 4x \cdot e^{2x} + 4x^2 e^{2x} + \frac{1}{x},$$

$$\because x \in (0, +\infty),$$

$$\therefore h'(x) > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{令 } h(x_0) = 0,$$

$$\text{即 } 2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0,$$

$$\therefore 2x_0 e^{2x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0},$$

$$\text{即 } e^{2x_0} \cdot \ln e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0},$$

$$\therefore e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}, \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore e^{-2x_0} = x_0 ,$$

$$\therefore \frac{\ln x_0}{x_0} = -2 , \text{ ②}$$

$$\text{又 } h(x_0) = 0 .$$

$g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} - m ,$$

将①②代入, 则 $g(x_0) = 2 - m$,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = 2 - m > 1 ,$$

$$\therefore m < 1 ,$$

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

17 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

(1) 设 $h(x) = f(x+1) - g'(x)$ (其中 $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数), 求 $h(x)$ 的单调区间.

(2) 设 $k \in \mathbb{Z}$, 当 $x > 1$ 时, 不等式 $k(x-1) < xf(x) + 3g'(x) + 4$ 恒成立, 求 k 的最大值.

答案

(1) $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 5.

解析

(1) $h(x) = f(x+1) - g'(x) = \ln(x+1) - x + 2, x > -1$,

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} ,$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$,

因此, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 不等式 $k(x-1) < xf(x) + 3g'(x) + 4$,

$$\text{化为 } k < \frac{x \ln x + x}{x-1} + 2 ,$$

所以 $k < \frac{x \ln x + x}{x-1} + 2$, 对任意 $x > 1$ 恒成立.

$$\text{令 } g(x) = \frac{x \ln x + x}{x-1} + 2, \text{ 则 } g'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2} ,$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 2, (x > 1), \text{ 则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0 ,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{因为 } h(3) = 1 - \ln 3 < 0, h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0 ,$$

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在唯一实根 x_0 , 且满足 $x_0 \in (3, 4)$,

当 $1 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = \frac{x+x \ln x}{x-1} + 2$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $[g(x)]_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1} + 2 = \frac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1} + 2 = x_0 + 2 \in (5, 6)$,

所以 $k < [g(x)]_{\min} = x_0 + 2 \in (5, 6)$,

故整数 k 的最大值是 5.

18 已知函数 $f(x) = ax^3 + x^2 - ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{3}{a} \ln x$ 的单调区间.

(3) 若存在 $a \in (-\infty, -1]$, 使函数 $h(x) = f(x) + f'(x)$, $x \in [-1, b]$ ($b > -1$) 在 $x = -1$ 处取得最小值, 试求 b 的最大值.

答案

(1) 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 1$,

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$.

(2) 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, -\frac{3}{2a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{3}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(3) $b_{\max} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

解析

(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^3 + x^2 - x$,

$\therefore f'(x) = (x+1)(3x-1)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{3}$,

列表讨论 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 1$,

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$.

(2) $\therefore g(x) = ax^2 + x - a - \frac{3}{a} \ln x$,

$\therefore g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g'(x) = \frac{2a^2x^2 + ax - 3}{ax} = \frac{2a^2\left(x - \frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{3}{2a}\right)}{ax} \quad (a \neq 0),$$

①当 $a > 0$ 时,

由 $g'(x) > 0$, 解得: $x > \frac{1}{a}$, 由 $g'(x) < 0$, 解得: $0 < x < \frac{1}{a}$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增;

②当 $a < 0$ 时,

由 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < -\frac{3}{2a}$, 由 $g'(x) < 0$, 解得: $x > -\frac{3}{2a}$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, -\frac{3}{2a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{3}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(3) $\because f'(x) = 3ax^2 + 2x - a$,

$$\therefore h(x) = ax^3 + (3a+1)x^2 + (2-a)x - a,$$

由题意知, $h(x) \geq h(-1)$ 在区间 $[-1, b]$ 上恒成立,

$$\text{即 } (x+1)[ax^2 + (2a+1)x + (1-3a)] \geq 0,$$

当 $x = -1$ 时, 不等式成立;

当 $-1 < x \leq b$ 时, 不等式可化为 $ax^2 + (2a+1)x + (1-3a) \geq 0$,

$$\text{令 } F(x) = ax^2 + (2a+1)x + (1-3a),$$

$$\because a \leq -1, F(-1) = -4a > 0,$$

$$\therefore F(b) = ab^2 + (2a+1)b + (1-3a) \geq 0,$$

$$\text{即 } \frac{b^2 + 2b - 3}{b+1} \leq -\frac{1}{a},$$

$$\text{由题意, 只需 } \frac{b^2 + 2b - 3}{b+1} \leq \left(-\frac{1}{a}\right)_{\max} = 1,$$

$$\text{解得: } \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \leq b \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2},$$

又 $b > -1$,

$$\therefore -1 < b \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore b_{\max} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

19 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a-1)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围.

答案

- (1) $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,
 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,
 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.
 $\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.
- (3) $a > 1$.

解析

- (1) $f(x) = \ln x^2 - x^2 + x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$$

$$= \frac{(-x+1)(2x+1)}{x},$$
 $\therefore x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,
 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.
- (2) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-2x^2 + (2a-1)x + a}{x}$,
 $f'(x) = \frac{(-x+a)(2x+1)}{x}$, $x > 0$,
 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,
 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值,
 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调递减.
 $\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.
- (3) 当 $a = 0$ 时,
 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意,
 当 $a \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-(2x+1)(x-a)}{x},$$
 $f'(x) = 0$ 时, $x = -\frac{1}{2}$ 或 a ,
 设 $g(x) = -(2x+1)(x-a)$,
 $\therefore x \in (0, +\infty)$,
 $\therefore g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,
 $g(x) > 0$ 时, $f(x)$ 单调增,
 $g(x) < 0$ 时, $f(x)$ 单调减,
 $\therefore f(x)$ 有两个而不同的两点,
 则 $f(x)$ 不可在 $(0, +\infty)$ 恒单调,

即只有 $a > 0$ 时满足 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $(a, +\infty)$ 上单调减,
 $f(x)$ 可能存在两个零点, 且由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 取最大, $f(a) > 0$,
 $f(a) = a \ln a - a^2 + (2a - 1)a > 0$.
 $\therefore a > 0$,
 $\therefore \ln a - a + 2a - 1 > 0$ 即 $\ln a > 1 - a$,
 得: $a > 1$.

20 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a - 2)e^x - x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

答案

- (1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;
 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.
- (2) $(0, 1)$.

解析

- (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a - 2)e^x - 1 = (ae^x - 1) \cdot (2e^x + 1)$.
 ①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;
 ②若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$,
 当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在
 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.
 综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;
 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.
- (2) 方法一: ①若 $a \leq 0$, 由 (1) 知, $f(x)$ 至多有一个零点;
 ②若 $a > 0$, 由 (1) 知, 当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为
 $f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$.
 (i) 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;
 (ii) 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点;
 (iii) 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$,

又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > -2e^{-2} + 2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 内有一个零点,

设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln\left(\frac{3}{a} - 1\right)$, 则

$$f(n_0) = e^{n_0}(ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0,$$

由于 $\ln\left(\frac{3}{a} - 1\right) > -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 内有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$.

方法二: 若 $a \leq 0$ 时, 由 (1) 可知 $f(x)$ 最多有一个零点, 不符合题意, 故舍去,

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$, 令 $e^x = t$,

则 $x = \ln t$ ($t > 0$), $f(t) = at^2 + (a-2)t - \ln t$,

当 $t \rightarrow 0$ 时, $f(t) \rightarrow +\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow +\infty$,

所以函数有两个零点时, $f(t)$ 的最小值小于 0 即可,

$$f'(t) = 2at + (a-2) - \frac{1}{t} = \frac{(2t+1)(at-1)}{t}, \text{ 令 } f'(t) = 0, \text{ 则 } t = \frac{1}{a},$$

故 $f(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上是减函数, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上是增函数,

$$\text{所以 } f(t)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + (a-2) \cdot \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0,$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0, \text{ 即 } \ln \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - 1 > 0,$$

设 $m = \frac{1}{a}$, 则 $g(m) = \ln m + m - 1$ ($m > 0$),

$$\text{则 } g'(m) = \frac{1}{m} + 1, \text{ 由 } g(1) = 0,$$

$$\text{所以 } m = \frac{1}{a} > 1,$$

解得 $0 < a < 1$,

所以 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

21 设函数 $f(x) = me^x - x^2 + 3$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 求函数 $h(x) = xf(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求 m 的取值范围.

答案

(1) 见解析

(2) 见解析

解析

(1) 由函数 $f(x)$ 是偶函数, 得 $f(-x) = f(x)$,

即 $me^{-x} - (-x)^2 + 3 = me^x - x^2 + 3$ 对于任意实数 x 都成立,

所以 $m = 0$.

此时 $h(x) = xf(x) = -x^3 + 3x$, 则 $h'(x) = -3x^2 + 3$.

由 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \pm 1$.

当 x 变化时, $h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

所以 $h(x)$ 有极小值 $h(-1) = -2$, 有极大值 $h(1) = 2$.

(2) 解: 由 $f(x) = me^x - x^2 + 3 = 0$, 得 $m = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.

所以“ $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点”等价于“直线 $y = m$ 与曲线 $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ 在 $x \in [-2, 4]$ 时有且只有两个公共点”.

对函数 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$.

由 $g'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

当 x 变化时, $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$[-2, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, 4]$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $g(x)$ 在 $[-2, -1)$, $(3, 4]$ 上单调递减, 在 $(-1, 3)$ 上单调递增.

又因为 $g(-2) = e^2$, $g(-1) = -2e$, $g(3) = \frac{6}{e^3} < g(-2)$, $g(4) = \frac{13}{e^4} > g(-1)$,

所以当 $-2e < m < \frac{13}{e^4}$ 或 $m = \frac{6}{e^3}$ 时, 直线 $y = m$ 与曲线 $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ 在 $x \in [-2, 4]$ 时有且只有两个公共点.

即当 $-2e < m < \frac{13}{e^4}$ 或 $m = \frac{6}{e^3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点.

22 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - a - \frac{a \ln x}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 试讨论函数 $F(x) = xf(x)$ 的单调性.

(2) 若 $a \in \mathbf{Z}$, 且函数 $f(x)$ 有两个零点 , 求实数 a 的最小值 .

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

当 $a > 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减 , 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) 2 .

解析

(1) $F(x) = xf(x) = \frac{1}{2}x^2 + (1-a)x - a\ln x, (x > 0)$,

$$\text{则 } F'(x) = x + (1-a) - \frac{a}{x} = \frac{x^2 + (1-a)x - a}{x} = \frac{(x-a)(x+1)}{x} ,$$

① 当 $a \leq 0$ 时 , $F'(x) > 0$, $\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

② 当 $a > 0$ 时 , 有 $x > a$ 时 , $F'(x) > 0$, $0 < x < a$ 时 , $F'(x) < 0$,

$\therefore F(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减 , 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增 .

综上 , 当 $a \leq 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

当 $a > 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减 , 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增 .

(2) 函数 $f(x)$ 有两个零点 , 等价于 $F(x)$ 有两个零点 ,

由(1)可知 , 当 $a \leq 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

$\therefore F(x)$ 最多只有一个零点 , 不符合题意 , 所以 $a > 0$.

又当 $a > 0$ 时 , $F(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减 , 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增 ,

$$\text{故 } F(x)_{\min} = F(a) = \frac{1}{2}a^2 + (1-a) \cdot a \ln a = a - \frac{1}{2}a^2 - a \ln a ,$$

要使得 $F(x)$ 有两个零点 , 则有 $F(x)_{\min} < 0$, 即 $a - \frac{1}{2}a^2 - a \ln a < 0$,

又 $a > 0$, 所以只需 $1 - \frac{1}{2}a - \ln a < 0$ 即可 .

$$\text{令 } h(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \ln x (x > 0) ,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 , 且 $h(1) = \frac{1}{2} > 0$, $h(2) = -\ln 2 < 0$,

$\therefore$ 存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 当 $x > x_0$ 时 , $h(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $a > x_0$ 时 , 有 $h(a) < 0$, 即 $F(x)_{\min} < 0$,

又 $a \in \mathbf{Z}$, $\therefore a_{\min} = 2$,

此时 , 当 $x \rightarrow 0$ 时 , $F(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x = e^2$ 时 , $F(e^2) = \frac{1}{2}e^4 - e^2 - 4 > 0$,

$\therefore F(x)$ 有两个零点 , 故实数 a 的最小值等于 2 .

- (1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 零点的个数 .
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
- (3) 设函数 $g(x) = \frac{2e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围 .

答案

- (1) 1 .
- (2) $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内为单调增函数 ,
 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}, +\infty\right)$ 内为单调增函数 ,
 在 $\left(\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}\right)$ 递减 .
- (3) $\left(\frac{4e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$.

解析

- (1) $a = 2$ 时, $f(x) = 2x - \frac{2}{x} - 2\ln x$ 原函数定义域为 $(0, +\infty)$,
 $\therefore f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2} > 0$ 恒成立, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 .
 且 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 零点的个数为 1 .
- (2) 原函数定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore f'(x) = \frac{ax^2 - 2x + a}{x^2}$,
 $\therefore a > 0$, 设 $g(x) = ax^2 - 2x + a (x \in (0, +\infty))$
 由题意知 $\Delta = 4 - 4a^2 \leq 0$, $\therefore a \geq 1$.
 即 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内为单调增函数 ,
 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}, +\infty\right)$ 内为单调增函数 ,
 在 $\left(\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}\right)$ 递减 .
- (3) 原命题等价于 $f(x) - g(x) > 0$ 在 $[1, e]$ 上有解 ,
 设 $F(x) = f(x) - g(x) = ax - \frac{2}{x} - 2\ln x - \frac{2e}{x}$,
 $\therefore F'(x) = \frac{ax^2 + a + 2(e-x)}{x^2} > 0$,
 $\therefore F(x)$ 是增函数
 $\therefore [F(x)]_{\max} = F(e) > 0$, 解得 $a > \frac{4e}{e^2 - 1}$,
 $\therefore a$ 的取值范围是 $\left(\frac{4e}{e^2 - 1}, +\infty\right)$.

- (1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.
- (2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2x + 2x^2$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性.
- (3) 若 (2) 中函数 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且不等式 $g(x_1) \geq mx_2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案

- (1) $y = -1$.
- (2) $a \leq 0$, 单调递增区间是 $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$,
 单调递减区间是 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$;
 $0 < a < \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$,
 $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$,
 单调递减区间是 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$;
 $a \geq \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.
- (3) $m \leq -\frac{3}{2} - \ln 2$.

解析

- (1) $\because$ 当 $a = 2$ 时, $f(x) = -x^2 + 2\ln x$,
 $\therefore f'(x) = -2x + \frac{2}{x}$.
 $\therefore f(1) = -1, f'(1) = 0$,
 $\therefore$ 切线方程为 $y = -1$.
- (2) $g'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x}$,
 $a \leq 0$, 单调递增区间是 $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间是 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$;
 $0 < a < \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$,
 $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$,
 单调递减区间是 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$;
 $a \geq \frac{1}{2}$, 单调递增区间 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.
- (3) $0 < a < \frac{1}{2}$, $x_1 + x_2 = 1, 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x_2 < 1$,
 $\frac{g(x_1)}{x_2} = 1 - x_1 + \frac{1}{x_1 - 1} + 2x_1 \ln x_1$,
 令 $h(x) = 1 - x + \frac{1}{x - 1} + 2x \ln x \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$,
 $h'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} + 2 \ln x$,

由 $0 < x < \frac{1}{2}$, 则 $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} < 0$,

$\therefore 2\ln x < 0$, 则 $h'(x) < 0$. 即 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 递减 .

即有 $h(x) > h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln 2$.

即 $m \leqslant -\frac{3}{2} - \ln 2$.