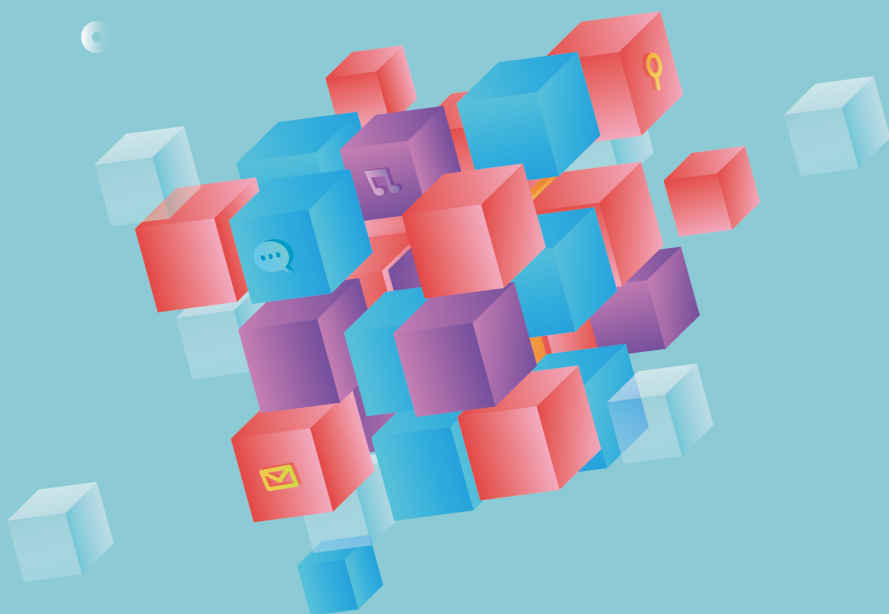


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

1、考试要点

本模块是高考考查要点，每年都会考查，小题通常会在选择第七或第八题，主要考查双曲线和抛物线的几何性质和方程计算，大题通常会在第十八题或十九题位置，主要考查椭圆的性质的灵活运用以及直线和椭圆的位置关系衍变的题型，计算量比较大。

2、课程内容

本模块主要是圆锥曲线在解答题中的考察，主要对圆锥曲线解答题中常见题型进行分类讲解与练习。这一部分需要良好的计算能力和灵活的解题思维，希望同学们耐心细心，认真完成这一部分的学习。

目 录

第 1 讲 直线与椭圆的位置关系 1..... 01

- 知 识 点 1 直线与椭圆位置关系的判定
- 知 识 点 2 弦长问题
- 知 识 点 3 面积问题
- 知 识 点 4 面积最值问题

第 2 讲 直线与椭圆的位置关系 2.....13

- 知 识 点 1 中点弦、垂直平分问题
- 知 识 点 2 等比分线问题
- 知 识 点 3 定点定值
- 知 识 点 4 综合问题



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

直线与椭圆的位置关系 1





综合近三年高三重点区、校的高三月考期末试题 33 套及一二三模试题 80 套，并结合近五年的高考试题进行了全方位数据分析，总结的本模块重点考点如下：

【高频考点】

知识点	高三上考试 (33 套)	一二三模 (80 套)	真题 (5 套)
椭圆的定义、标准方程	87.87%	91.25%	100%
椭圆的几何性质	60.60%	70.00%	60.00%
直线和椭圆的位置关系	66.67%	90.00%	100.00%
向量问题	15.15%	17.50%	20.00%
定值定点问题	18.18%	30.00%	0.00%
中点弦问题	18.18%	12.50%	20.00%
共线比例问题	3.03%	10.00%	20.00%
面积问题	24.24%	33.75%	20.00%

【重难点】

- ①能通过联立结合韦达定理计算弦长.
- ②会结合基本不等式、导数等处理弦长的最值与取值范围等综合问题.



直线与椭圆位置关系的判定

直线与椭圆的位置关系可分为：相交、相切、相离.

这三种位置关系的判定条件可归纳为：

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，椭圆方程 $C: f(x, y) = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases},$$

消去 y (或消去 x) 得: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交，直线与椭圆有两个交点；

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离，直线与椭圆无交点；

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切，直线与椭圆有一个交点.

- 1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 若直线 $y = kx + 2$ 与椭圆有两个交点，求出 k 的取值范围.

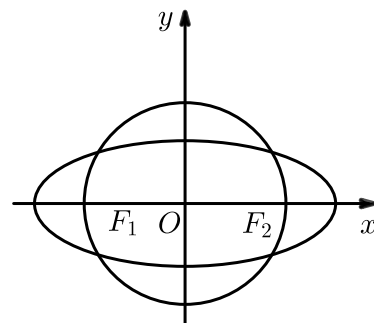


- 2 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 过点 $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ ，焦点 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ ， $F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，圆 O 的直径为 F_1F_2 .

(1) 求椭圆 C 及圆 O 的方程.

(2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P ,

若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，求点 P 的坐标.



弦长问题

设圆锥曲线 $C: f(x, y) = 0$ 与直线 $l: y = kx + b$ 相交于 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点，

$$\text{则弦长 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$\text{或 } |AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



- 3 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = -4y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 过椭圆 C_1 左焦点 F_1 与 x 轴不垂直的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 $|AB| = 2$, 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 说明理由.

- 4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

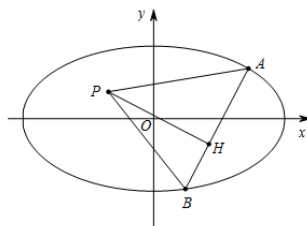
(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M, N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.



面积问题



三角形面积问题

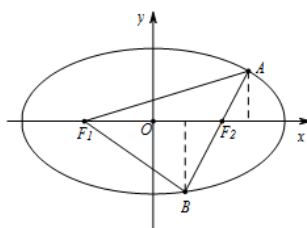


直线 AB 方程: $y = kx + m$, $d = |PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|kx_0 - y_0 + m|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$



焦点三角形的面积



直线 AB 过焦点 F_2 , $\triangle ABF_1$ 的面积为:

$$S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = c |y_1 - y_2| = \frac{c \sqrt{\Delta_y}}{|a|}.$$



平行四边形的面积

直线 AB 为 $y = kx + m_1$, 直线 CD 为 $y = kx + m_2$, $d = |CH| = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|},$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = |AB| \cdot d = \sqrt{1 + k^2} \frac{\sqrt{\Delta_x}}{|a|} \cdot \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_x} |m_1 - m_2|}{|a|}.$$



- 5 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的准线上，且椭圆的短轴长为 2， F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点， A, B 分别为椭圆的左、右顶点，设点 P 在第一象限，且 $PB \perp x$ 轴，连接 PA 交椭圆于点 C ，直线 PA 的斜率为 k 。

- (1) 求椭圆的方程。
(2) 若三角形 ABC 的面积等于四边形 $OBPC$ 的面积，求 k 的值。

- 6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ，若点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上，则点 $N\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right)$ 称为点 M 的一个“椭点”。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，且 A, B 两点的“椭点”分别为 P, Q ，以 PQ 为直径的圆经过坐标原点，试求 $\triangle AOB$ 的面积。



7 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ，点 P 在椭圆上， O 为原点.

(1) 若 $|PO| = c$ ， $\angle F_2OP = \frac{\pi}{3}$ ，求椭圆的离心率.

(2) 若椭圆的右顶点为 A ，短轴长为 2，且满足 $\frac{1}{|OF_2|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{e}{3|F_2A|}$ (e 为椭圆的离心率).

①求椭圆的方程.

②设直线 $l: y = kx - 2$ 与椭圆相交于 P, Q 两点，若 $\triangle POQ$ 的面积为 1，求实数 k 的值.

8 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点重合，且这个顶点与椭圆 C 的两个焦点构成的三角形面积为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若椭圆 C 的上顶点为 A ，过 A 作斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于另一点 B ，线段 AB 的中点为 M ， O 为坐标原点，连接 OM 并延长交椭圆于点 N ， $\triangle ABN$ 的面积为 k ，求 k 的值.



面积最值问题

以下是圆锥曲线经常用到的均值不等式形式：

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}}, \quad (\text{注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论})$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6}, \quad \text{当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$(3) |PQ|^2 = 34 + 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} + 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \geq 34 + 2\sqrt{25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} \times 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}} = 64,$$

当且仅当 $25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} = 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}$ 时等号成立.

$$(4) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2}} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $m^2 = -m^2 + 8$ 时, 等号成立.

(5)

$$S = 2\sqrt{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{2k^2 - m_1^2 + 1}}{1+2k^2} \cdot \frac{|2m_1|}{\sqrt{1+k^2}} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{(2k^2 - m_1^2 + 1)m_1^2}}{1+2k^2} \leq 4\sqrt{2} \frac{\frac{2k^2 - m_1^2 + 1 + m_1^2}{2}}{1+2k^2} = 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $2k^2 + 1 = 2m_1^2$ 时等号成立.

9 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B, D 两点, 且 A, B, D 三点不重合.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?



- 10 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A, B 是椭圆与 x 轴的两个交点, M 为椭圆 C 的上顶点, 设直线 MA 的斜率为 k_1 , 直线 MB 的斜率为 k_2 , $k_1 k_2 = -\frac{2}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的离心率.

(2) 设直线 l 与 x 轴交于点 $D(-\sqrt{3}, 0)$, 交椭圆于 P, Q 两点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = 3\overrightarrow{QD}$, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求椭圆 C 的方程.

- 11 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $P(-2, 0)$ 是它的一个顶点, 过点 P 作圆 $C_2: x^2 + y^2 = r^2$ 的切线 PT , T 为切点, 且 $|PT| = \sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C_1 及圆 C_2 的方程.

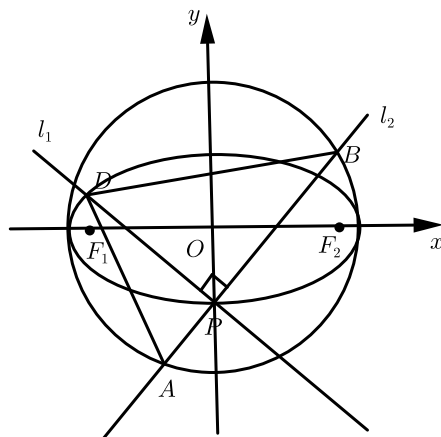
(2) 过点 P 作互相垂直的两条直线 l_1, l_2 , 其中 l_1 与椭圆的另一交点为 D , l_2 与圆交于 A, B 两点, 求 $\triangle ABD$ 面积的最大值.



- 12 如图, 点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点, C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线, 其中 l_1 交椭圆 C_1 于另一点 D , l_2 交圆 C_2 于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

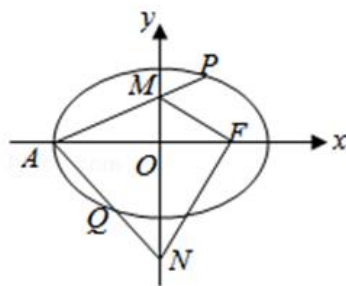
(2) 当 $\triangle ABD$ 的面积取得最大值时, 求直线 l_1 的方程.



- 13 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点, P 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的点, 直线 PA 交 y 轴于点 M , 点 N 在 y 轴上, 且 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 设直线 AN 交椭圆 C 于另一点 Q , 求 $\triangle APQ$ 的面积的最大值.





- 14 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 M 是椭圆上的动点. $\triangle MF_1F_2$ 的最大面积是 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 圆 E 经过椭圆的左右焦点, 且与椭圆 C 在第一象限的交点为 A , 且 F_1, E, A 三点共线. 直线 l 交椭圆 C 于两点 P, Q , 且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{OA} (\lambda \neq 0)$.

①求直线 OA 的斜率.

②当 $\triangle APQ$ 的面积取到最大值时, 求直线 l 的方程.

- 15 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以原点 O 为圆心, 椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + 2 = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设 Q 为椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点, 过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆 C 于 M, N 两个不同的点, 记 $\triangle QF_2M$ 的面积为 S_1 , $\triangle OF_2N$ 的面积为 S_2 , 令 $S = S_1 + S_2$, 求 S 的最大值.



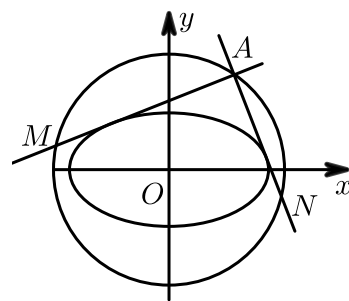
- 16 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点，过点 A 作两条直线 l_1, l_2 ，它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点，且分别交圆于点 M, N .

(1) 若 $A(-2, 0)$ ，求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 请回答下列各题：

①求证：对于圆上的任意点 A ，都有 $l_1 \perp l_2$ 成立.

②求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.



第 2 讲

直线与椭圆的位置关系 2

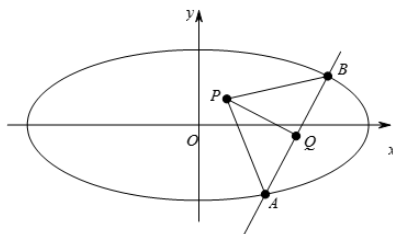




中点弦、垂直平分问题



等腰三角形模型



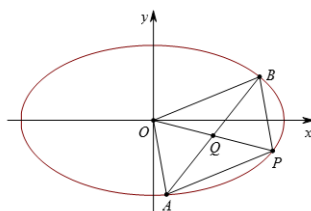
$$|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}},$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 注意一般只有弦与椭圆相交的两点才设为 x_1, x_2 的,

$$x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_Q = kx_Q + m$$



平行四边形模型



以 OA, OB 为邻边的平行四边形的顶点 P 在椭圆上,

$$x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_Q = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

易知 P 点坐标 $x_P = 2x_Q = x_1 + x_2$,

$$y_P = 2y_Q = y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = k(x_1 + x_2) + 2m.$$

注意: 1. 不能把 x_P 代入 $y = kx + m$ 方程中求 y_P , 因为点 P 不在直线上. 2. 由 x_P 求 y_P 分子是可消去的.



- 1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 8, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求 C 的方程.

(2) 设 F 为 C 的左焦点, T 为直线 $x = -6$ 上任意一点, 过点 F 作 TF 的垂线交 C 于两点 P, Q .

①证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点).

②当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 取最小值时, 求点 T 的坐标.

- 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设点 P, Q 为椭圆上位于第一象限的两个动点, 满足 $PF \perp QF$, C 为 PQ 的中点, 线段 PQ 的垂直平分线分别交 x 轴、 y 轴于 A, B 两点.

求证: A 为 BC 的中点.



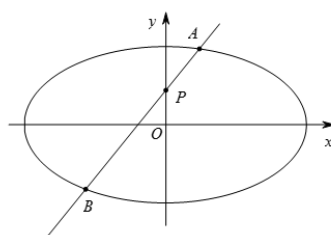
- 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $|OA| = |OF|$, 其中 O 为原点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.



等比分线问题



设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(0, t)$, $Q(s, 0)$,

$$|AP| = \lambda |BQ| \Leftrightarrow y_1 - t = -\lambda y_2;$$

$$|AP| = \lambda |BP| \Leftrightarrow x_1 = -\lambda x_2;$$

$$|BP| = \lambda |AB| \Leftrightarrow -x_2 = \lambda(x_1 - x_2);$$

$$|AQ| = \lambda |BQ| \Leftrightarrow y_1 = -\lambda y_2;$$

$$|AQ| = \lambda |AB| \Leftrightarrow y_1 = \lambda(y_1 - y_2);$$

线段成比例主要利用相似转化为 x_1, x_2 或是 y_1, y_2 成比例的关系.



4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆交于不同的两点 A, B , 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ 相切于点 M .

①证明: $OA \perp OB$ (O 为坐标原点).

②设 $\lambda = \frac{|AM|}{|BM|}$, 求实数 λ 的取值范围.



- 5 在平面直角坐标系中，焦点在 x 轴上的椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 经过点 $(b, 2e)$ ，其中 e 为椭圆 C 的离心率. 过点 $T(1, 0)$ 作斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (A 在 x 轴下方).
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 过原点 O 且平行于 l 的直线交椭圆 C 于点 M, N ，求 $\frac{AT \cdot BT}{MN^2}$ 的值.
- (3) 记直线 l 与 y 轴的交点为 P . 若 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PB}$ ，求直线 l 的斜率 k .



定点定值



直线过定点问题

要证明直线 $y = kx + m$ 过定点，只需要找到 k 与 m 之间的关系即可.
确定定点 $P(m, n)$ ，可以证明 AP, BP, AB 任意两个斜率相等即可.



定值问题

定值问题基本思路 $\Leftrightarrow$ 转化为与 A, B 两点相关的斜率 $\Leftrightarrow k_1$ 与 $k_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2, x_1 x_2$ 的关系式.



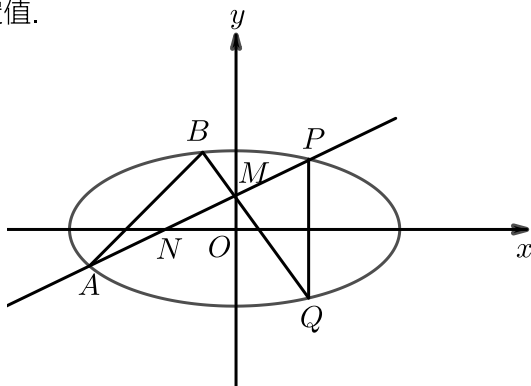
6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过动点 $M(0, m)$ ($m > 0$) 的直线交 x 轴于点 N , 交 C 于点 A, P (P 在第一象限), 且 M 是线段 PN 的中点. 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q , 延长线 QM 交 C 于点 B .

① 设直线 PM 、 QM 的斜率分别为 k, k' , 证明 $\frac{k'}{k}$ 为定值.

② 求直线 AB 的斜率的最小值.



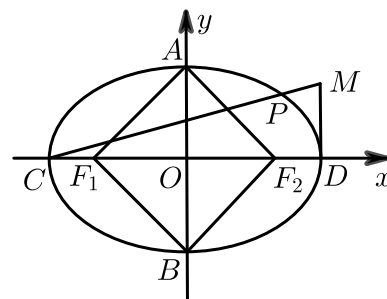


- 7 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 短轴的两端点为 A 、 B , 且四边形 F_1AF_2B 是边长为 2 的正方形.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 若 C 、 D 分别是椭圆长轴的左、右端点, 动点 M 满足 $MD \perp CD$, 连结 CM , 交椭圆于点 P , 证明: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值.

(3) 在 (2) 的条件下, 试问 x 轴上是否存在异于点 C 的定点 Q , 使得以 MP 为直径的圆恒过直线 DP 、 MQ 的交点, 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.





8 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 C 与 y 轴交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设点 P 是椭圆 C 上的一个动点, 且点 P 在 y 轴的右侧. 直线 PA, PB 与直线 $x = 4$ 分别交于 M, N 两点. 若以 MN 为直径的圆与 x 轴交于两点 E, F , 求点 P 横坐标的取值范围及 $|EF|$ 的最大值.

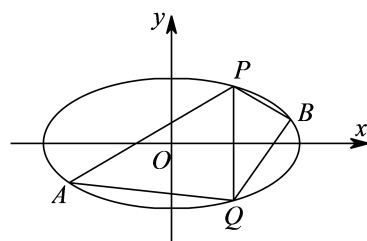
9 已知椭圆 C 的中心在原点, 离心率等于 $\frac{1}{2}$, 它的一个短轴端点恰好是抛物线 $x^2 = 8\sqrt{3}y$ 的焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 已知 $P(2, 3), Q(2, -3)$ 是椭圆上的两点, A, B 是椭圆上位于直线 PQ 两侧的动点.

①若直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.

②当 A, B 运动时, 满足 $\angle APQ = \angle BPQ$, 试问直线 AB 的斜率是否为定值, 请说明理由.





- 10 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(2, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $l: y = \frac{1}{2}x + t (t \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若直线 AE, AF 分别与 x 轴正半轴交于 P, Q 两点, 求证: $|OP| + |OQ|$ 为定值.

- 11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点分别为点 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 点 D 为 x 轴上一点, 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N , 过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E . 证明: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为定值.



综合问题

- 12 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 F_1 、 F_2 分别是椭圆的左、右焦点，在直线 $x = 2$ 上的点 $P(2, \sqrt{3})$ 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于不同的两点 A 、 B 。
- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 若在椭圆 C 上存在点 Q ，满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OQ}$ (O 为坐标原点)，求实数 λ 的取值范围。

- 13 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，长轴长为等于圆 $R: x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 的直径，过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 A 、 B ，与圆 R 交于两点 M 、 N 。
- (1) 求椭圆 C 的方程。
- (2) 求证：直线 RA 、 RB 的斜率之和等于零。
- (3) 求 $|AB| \cdot |MN|$ 的取值范围。



- 14 已知抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的焦点为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, C 的准线与 E 交于 P, Q 两点, 且 $|PQ| = 2$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 过 E 的左顶点 A 作直线 l 交 E 于另一点 B , 且 BO (O 为坐标原点) 的延长线交 E 于点 M . 若直线 AM 的斜率为 1, 求 l 的方程.

- 15 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点), 求 $|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值.



- 16 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 直线 l 过点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 且与椭圆 C 相切于点 P .

- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 是否存在过点 $A(4, 0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M 、 N , 使得 $36|AP|^2 = 35|AM| \cdot |AN|$? 若存在, 试求出直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

- 17 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 短轴的两个端点和右焦点构成的三角形面积为 $2\sqrt{5}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
(2) 已知斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(-a, 0)$, 且直线 l 与椭圆 C 交于点 P (P 不在 x 轴上), 若点 Q 在 y 轴的负半轴上, $\triangle APQ$ 是等边三角形, 求 k 的值.



- 18 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点, M 为 E 上任意一点, $S_{\triangle F_1MF_2}$ 的最大值为 1, 椭圆右顶点为 A .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点), 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

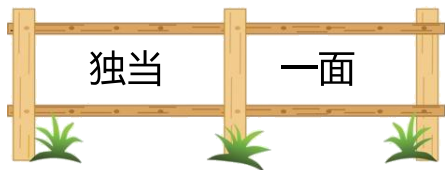
- 19 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(\sqrt{2}a, \sqrt{3})$, F_1, F_2 分别是椭圆 W 的左、右焦点, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

(1) 求椭圆 W 的方程.

(2) 过左焦点 F_1 作直线 l_1 交椭圆于 A, B 两点, 其中 $A(0, 1)$, 另一条过 F_1 的直线 l_2 交椭圆于 C, D 两点 (不与 A, B 重合), 且 D 点不与点 $(0, -1)$ 重合. 过 F_1 作 x 轴的垂线分别交直线 AD, BC 于 E, G .

①求 B 点坐标.

②求证: $|EF_1| = |F_1G|$.



- 1 在平面 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.
- 2 已知在平面直角坐标系 xOy 中的一个椭圆, 它的中心在原点, 左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 右顶点为 $D(2, 0)$, 设点 $A(1, \frac{1}{2})$.
- (1) 求该椭圆的标准方程.
- (2) 过原点 O 的直线交椭圆于点 B, C , 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点相同, F_1, F_2 为椭圆的左、右焦点, M 为椭圆上任意一点, $\triangle MF_1F_2$ 面积的最大值为 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设不过原点的直线: $y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

若直线 AF_2 与 BF_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 0$, 求证: 直线过定点, 并求出该定点的坐标.