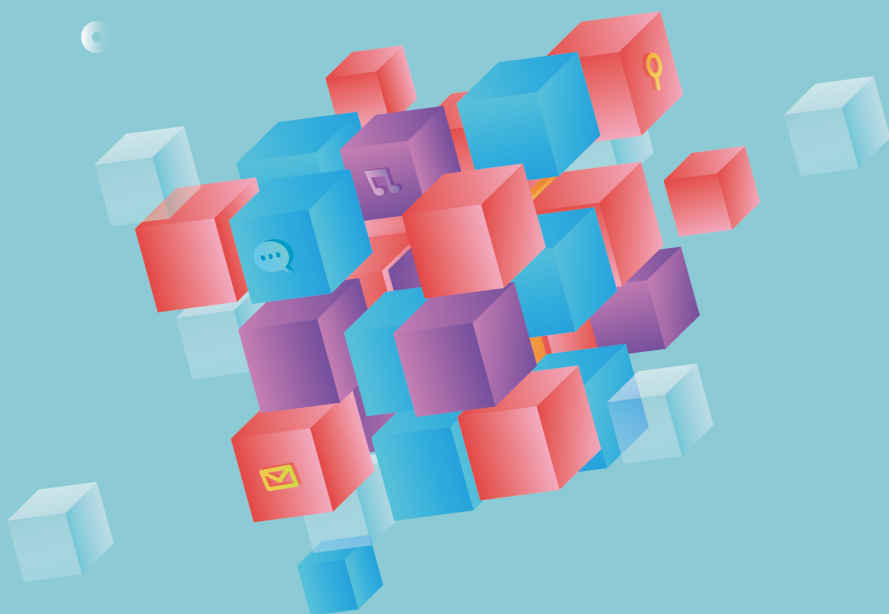


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

导数是高考中的重难点，一般以解答题压轴题的形式出现，难度比较大，分值占比大约10%。

本模块主要涉及导数的计算以及切线方程的求法等基础部分，利用导数解决函数的单调性、极值和最值等应用部分，以及利用导数构造函数证明不等式等综合应用部分的内容，紧密贴合天津对于导数的考察情况，难度较大。

目 录

第 1 讲 导数基础..... 01

- 知 识 点 1 恒成立问题
- 知 识 点 2 能成立问题

第 2 讲 导数的分类讨论.....09

- 知 识 点 1 恒成立与能成立综合
- 知 识 点 2 值域型

第 3 讲 零点问题与隐零点问题.....15

- 知 识 点 1 零点问题
- 知 识 点 2 隐零点问题



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

恒成立问题与能成立问题





综合近三年高三重点区、校的高三月考期末试题 33 套及一二三模试题 80 套，并结合近五年的高考试题进行了全方位数据分析，总结的本模块重点考点如下：

【高频考点】

知识点	高三上考试（33 套）	一二三模（80 套）	真题（5 套）
导数运算	72.72%	87.50%	100%
导数的几何意义	57.57%	60.00%	80.00%
导数与单调性	81.81%	96.25%	100%
导数与极值最值	93.93%	75.00%	100%
构造抽象函数	0.00%	2.50%	0.00%
导数与零点	24.24%	38.75%	80.00%
与对数函数结合	12.12%	3.75%	20.00%
与指数函数结合	9.09%	1.25%	40.00%
与三角函数结合	3.03%	1.25%	20.00%

【重要技巧】

- 1、小题中恒成立问题可以代入特殊值来排除选项或减少讨论范围；
- 2、小题中零点问题可以转化成两个函数的交点问题；
- 3、值域问题恒成立一方的值域是存在性一方的子集。



恒成立问题

- (1) $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (2) $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (3) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (4) $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (5) $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (6) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____

1 设函数 $f(x) = (x - a) \cdot e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时，试求 $f(x)$ 的单调增区间.

(2) 试求 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值.

(3) 当 $a = 1$ 时，求证：对于 $\forall x \in [-5, +\infty)$, $f(x) + x + 5 \geq -\frac{6}{e^5}$ 恒成立.



2 已知函数 $g(x) = a(x-1) - \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数底数.

(1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 已知当 $a \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$, $b \in \mathbf{R}$ 时, 若函数 $g(x) \geq b$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 都成立, 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.

3 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若对于任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$, 求实数 a 的取值范围.

4 已知函数 $f(x) = x^2 - (2m+1)x + \ln x (m \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, 若函数 $g(x) = f(x) + (a-1)\ln x$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

(2) 当 $x > 1$ 时, $f(x) < (1-m)x^2$ 恒成立, 求 m 的取值范围.



5 已知函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$, $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切, 求 a, b 的值.

(2) 在 (1) 的条件下, 求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最大值.

(3) 若不等式 $f(x) \geq x$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立, 求 a 的取值范围.

6 设函数 $f(x) = x - \ln x$, $g(x) = x + \frac{a^2}{x}$ ($a > 0$). 若对任意的 $x_1, x_2 \in [1, e]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.



- 7 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 的图象在 $x = -1$ 处的切线方程为 $y = 3$.
- (1) 求 a, b 的值.
- (2) 证明: $\forall x_1, x_2 \in [-2, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 3$ 成立.

- 8 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (2a+2)x + (2a+1)\ln x$.
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率小于 0, 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 对任意的 $a \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, $x_1, x_2 \in [1, 2] (x_1 \neq x_2)$, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$, 求正数 λ 的取值范围.



能成立问题

- (1) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (2) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (3) $\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (4) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (5) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____
- (6) $\exists x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____.

9 设 $a \in \mathbf{R}$, 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 设 $g(x) = f(x) + f'(x)$, 若 $\exists x \in [1, 3]$, 有 $g(x) \leq 0$, 求实数 a 的取值范围.

10 已知 $f(x) = \ln x - 2x - a + 1$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.
- (2) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 过原点的切线方程.
- (3) 若存在 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ 使得 $f(x) \leq 0$ 成立, 求 a 的范围.



- 11 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$, $g(x) = -\frac{1+a}{x}$, $a \in \mathbf{R}$. 若在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

- 12 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(2) 若 $f(x) < a(x+1)$ 在 $x \in (-2, +\infty)$ 上有解, 求 a 的取值范围.

- 13 已知函数 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^3 + a$, 若存在 $x_0 \in [0, 2]$, 使得 $g(x_0) \leq f(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.



14 已知函数 $f(x) = a(x - \frac{1}{x}) - 2 \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 设函数 $g(x) = -\frac{a}{x}$. 若至少存在一个 $x_0 \in [1, e]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

15 设函数 $f(x) = x - a \ln x + \frac{b}{x}$ 在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 求 a 与 b 满足的关系式.

(2) 若 $a > 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 若 $a > 3$, 函数 $g(x) = a^2 x^2 + 3$, 若存在 $m_1, m_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得 $|f(m_1) - g(m_2)| < 9$ 成立, 求 a 的取值范围.

16 已知 $f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 令 $g(x) = ax^2 - 2 \ln x$, 则 $g(x) = 1$ 时有两个不同的根, 求 a 的取值范围.

(3) 存在 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq k |\ln x_1 - \ln x_2|$ 成立, 求 k 的取值范围.

第 2 讲

恒成立与能成立综合





恒成立与能成立综合

(1) $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

(2) $\exists x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

1 已知函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} + 1$, 函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$, 若对任意的 $x_1 \in [1, 2]$, 存在 $x_2 \in [-1, 1]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围为 _____.

2 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4x}$, $g(x) = x^2 - 2bx + 4$, 若对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则实数 b 的取值范围是 _____.

3 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$, 若 $g(x) = \frac{1}{e^x}$, 对任意 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 存在 $x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使 $f'(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

4 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$, $g(x) = f(x) + ax - 6 \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$ 为常数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 试判断 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $g(x)$ 在其定义域内为增函数, 求实数 a 的取值范围.

(3) 设函数 $h(x) = x^2 - mx + 4$, 当 $a = 2$ 时, 若存在 $x_1 \in [1, 2]$, $\forall x_2 \in [1, 2]$, 总有 $g(x_1) \geq h(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.



5 已知 $f(x) = \ln x - mx^2 - (2m - 1)x (m \in \mathbf{R})$, $g(x) = \frac{e^x}{2} - x^2 - 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 单调性.

(2) 当 $m > 0$ 时, 若对于任意 $x_1 > 0$, 总存在 $x_2 \in [-2, -1]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求 m 的取值范围.

6 已知 $f(x) = ax - \ln x$, $x \in (0, e]$, e 是自然常数, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 设 $g(x) = x^2 - x + 3b^2 - 2b$. 当 $a = 1$ 时, 若对任意的 $x_1 \in (0, e]$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求 b 的取值范围.

(3) 是否存在实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值是 3, 若存在, 求 a 的值; 若不存在, 说明理由.



- 7 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbf{R})$.
- (1) 若 $a = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.
 - (2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
 - (3) 设 $g(x) = x^2 - 2x + 2$, 若对任意 $x_1 \in (0, +\infty)$, 均存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) < g(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

- 8 已知两函数 $f(x) = 8x^2 + 16x - k$, $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x$, 其中 k 为实数.
- (1) 对任意 $x \in [-3, 3]$ 都有 $f(x) \leq g(x)$ 成立, 求 k 的取值范围.
 - (2) 存在 $x \in [-3, 3]$ 使 $f(x) \leq g(x)$ 成立, 求 k 的取值范围.
 - (3) 对任意 $x_1, x_2 \in [-3, 3]$ 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求 k 的取值范围.



值域型

$\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ _____

- 9 已知 $f(x) = ax + \frac{a}{x}$, $g(x) = e^x - 3ax$, $a > 0$, 若对 $\forall x_1 \in (0, 1)$, 存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得方程 $f(x_1) = g(x_2)$ 总有解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

- 10 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.



11 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, $x \in (1, e)$, 且 $f(x)$ 有极值.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 函数 $g(x) = x^3 - x - 2$, 证明: $\forall x_1 \in (1, e)$, $\exists x_0 \in (1, e)$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立.

12 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3$ ($a > 0$), $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

第 3 讲

零点问题与隐零点问题





零点问题



求零点个数

- 1 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x^2}{2} - (a+1)x$, $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值.
- (2) 当 $a \leq 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.
- 2 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ ($a \in \mathbf{R}$) ($e = 2.71828 \cdots$ 是自然对数的底数).
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 讨论 $g(x) = f(x) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 在区间 $[0, 1]$ 内零点的个数.



3 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}, m \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $m = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 求 $f(x)$ 的最小值.
- (2) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3}$ 零点的个数.
- (3) 若对任意 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

4 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, $g(x) = b \ln x$, 且曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处有相同的切线.

- (1) 求实数 a, b 的值.
- (2) 求证: $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.
- (3) 当 $n \in [6, +\infty)$ 时, 求方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数.



论证零点存在性

5 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.



由零点信息确定参数取值范围

6 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上无零点, 求 a 最小值.



7 已知函数 $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $g(x) = x^2 - x + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 若函数 $h(x)$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同零点, 求实数 a 的取值范围.

8 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

(3) 设若函数 $f(x)$ 有两个零点为 m, n , 求证: $mn > e^2$.



- 9 设函数 $f(x) = x^2 - a \ln x$, $g(x) = (a-2)x$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 若函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求满足条件的最小正整数 a 的值.
- (3) 若函数 $f(x) \geq g(x) + m$ 对任意的 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, 任意的 $x \in [1, e^2]$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.



隐零点问题

- 10 函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0)$
- 11 已知函数 $f(x) = \ln(x+a) - \frac{x}{a}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 若 $f(x) - \frac{x}{a} < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
- (3) 若存在 $-a < x_1 < 0, x_2 > 0$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 求证: $x_1 + x_2 > 0$.



12 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 单调性.

(2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.

①证明: $f(x)$ 恰有两个零点.

②设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

13 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值.

(3) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2}f(x)$, 当 $a = 2$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.

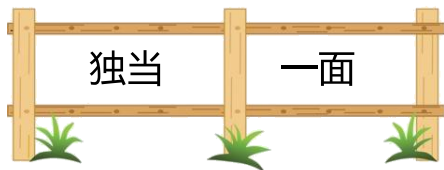


14 已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(3) 证明: $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.



1 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = f(x) + f'(x)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $g(x)$ 的单调区间.

(3) 求 a 的取值范围, 使得 $g(a) - g(x) < \frac{1}{a}$ 对任意 $x > 0$ 成立.

2 已知函数 $f(x) = ax - e^x$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使不等式 $f(x) \leq g(x) - e^x$ 成立, 求 a 的取值范围.

3 设函数 $f(x) = e^x + \ln(x+1) - ax$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程.

(2) 当 $a = 2$ 时, 证明函数 $f(x)$ 在定义域内的单调递增.

4 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上无零点, 求 a 最小值.