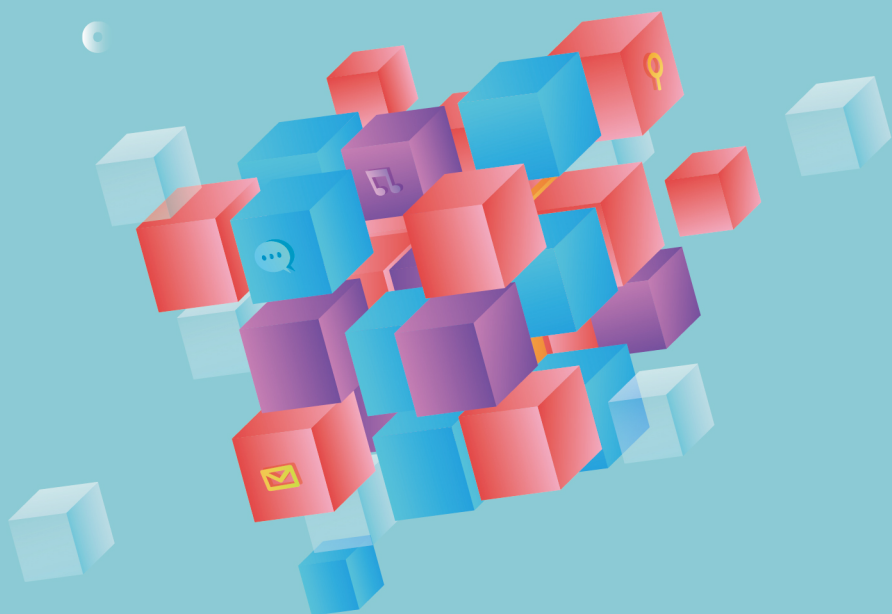


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

导数是高考的重难点。每年高考分值占比很高，重要性不言而喻；一般以解答题最后一题的形式出现，题型复杂多变，是同学们学习过程中的一大难点。

本模块主要是对于导数部分非常重要典型的题型包括恒能成立问题、零点隐零点问题等进行了归类梳理，并且对于相对应的解题思路做了总结。

目 录

第 1 讲 导数基础..... 01

- 知 识 点 1 导数的几何意义
- 知 识 点 2 导数的运算

第 2 讲 导数的分类讨论.....09

- 知 识 点 1 导数的应用
- 知 识 点 2 含参的分类讨论



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

导数基础





综合近三年高三重点区、校的高三月考期末试题 33 套及一二三模试题 80 套，并结合近五年的高考试题进行了全方位数据分析，总结的本模块重点考点如下：

【高频考点】

知识点	高三上考试（33 套）	一二三模（80 套）	真题（5 套）
导数运算	72.72%	87.50%	100%
导数的几何意义	57.57%	60.00%	80.00%
导数与单调性	81.81%	96.25%	100%
导数与极值最值	93.93%	75.00%	100%
构造抽象函数	0.00%	2.50%	0.00%
导数与零点	24.24%	38.75%	80.00%
与对数函数结合	12.12%	3.75%	20.00%
与指数函数结合	9.09%	1.25%	40.00%
与三角函数结合	3.03%	1.25%	20.00%

【易错点】

- 1、先求定义域；
- 2、求参数范围时注意端点能不能取到；
- 3、分类讨论中，二次项次数、一次项次数为零时不要忘记讨论，最后要把能合并的情况合并。

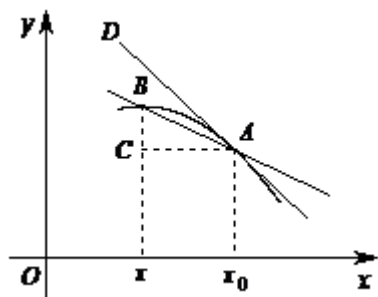


导数的几何意义

平均变化率: _____

瞬时变化率: _____

设函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示:



由导数的几何意义可知, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的斜率等于 _____.

(1) 函数 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 _____;

(2) 函数 $y = f(x)$ 过点 (a, b) 的切线方程

此时 (a, b) 可能是切点, 也可能不是切点;

因此设切点为 $(t, f(t))$, 求出在 $(t, f(t))$ 处切线方程 _____

代入 (a, b) , 得 _____, 解出 t , 再代入 _____ 即可.



平均变化率瞬时变化率

1 求函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[2, 2 + \Delta x]$ 和 $[3, 3 + \Delta x]$ 上的平均变化率.

2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 等于 ().

A. $f'(x_0)$

B. $f'(-x_0)$

C. $-f'(x_0)$

D. $-f'(-x_0)$

3 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处存在导数, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{3\Delta x} = ()$.

A. $\frac{1}{3}f'(1)$

B. $3f'(1)$

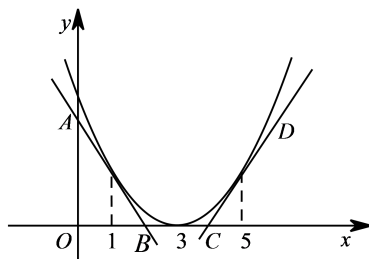
C. $f'(1)$

D. $f'(3)$



几何意义

- 4 函数 $f(x)$ 的图象在 $x=3$ 处与 x 轴相切, 在 $x=1$ 与 $x=5$ 处的切线分别为 AB , CD , 其中 A, B, C, D 的坐标分别为 $(0,3), (2,0), (4,0), (6,3)$, 如图, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.



- 5 已知点 P 是曲线 $y = x^3 - \sqrt{3}x + \frac{3}{5}$ 上的任意一点, 点 P 处切线的倾斜角为 α , 则角 α 的取值范围是 ().
- A. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
- C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

求切线方程

- 6 曲线 $y = \frac{x}{x+2}$ 在点 $(-1, -1)$ 处的切线方程为 ().
A. $y = 2x + 1$ B. $y = 2x - 1$ C. $y = -2x - 3$ D. $y = -2x - 2$
- 7 设曲线 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3, 2)$ 处的切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a = ()$.
A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2
- 8 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x+1)$ 的切线, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 9 过原点与曲线 $y = (x-1)^3$ 相切的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 10 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 11 若曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线, 也是 $y = \ln x + b$ 的切线, 则 $b = ()$.
A. -1 B. 1 C. 2 D. e



12 已知函数 $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$, 求 $y = f(x)$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

13 设函数 $f(x) = e^x - ax + a (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程.

14 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.

15 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + b, (b \in \mathbf{R})$.

若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$, 求 a, b 的值.

16 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 的导数 $f'(x)$ 满足 $f'(1) = 2a, f'(2) = -b, a, b \in \mathbf{R}$.

求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

毫厘不伐 将用斧柯

17 已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 _____.

18 函数 $f(x) = x \ln x + a$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 截得弦长为 2, 则实数 a 的值为 _____.



导数的运算



基本初等函数

基本初等函数	导函数
$f(x) = c$ (c 为常数)	
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	
$f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$)	
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = \ln x$	
$f(x) = a^x$	
$f(x) = \log_a x$	



导数的四则运算

- (1) $(f(x) + g(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$
 (2) $(f(x) - g(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$
 (3) $[f(x)g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$, $[af(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$
 (4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$.



复合函数求导

复合函数对自变量的导数等于已知函数对中间变量的导数与中间变量的导数的乘积. 即
 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则 $y'_x = f'(u) \cdot g'(x)$.



基础求导运算

- 19 给出下列四个命题: ①若 $y = \ln x$, 则 $y' = \frac{1}{x}$; ②若 $y = \frac{1}{x^3}$, 则 $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; ③若 $y = x^2 \sin x$, 则 $y' = -2x \sin x$; ④若 $y = \frac{x}{e^x}$, 则 $y' = \frac{1-x}{e^x}$, 其中正确命题的个数为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 20 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} \sin x$, 则 $f'(\pi) = (\quad)$.
 A. $\sqrt{\pi}$ B. $-\sqrt{\pi}$ C. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$ D. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$
- 21 设 $f(x) = x \ln x$, 若 $f'(x_0) = 2$, 则 $x_0 = (\quad)$.
 A. e^2 B. e C. $\frac{\ln 2}{2}$ D. $\ln 2$



- 22 设函数 $f(x) = (1 - 2x^3)^{10}$, 则 $f'(1) = (\quad)$.
A. 0 B. -1 C. -60 D. 60
- 23 求下列函数的导函数:
(1) $y = (3x^2 - 2)^2$.
(2) $y = 2x \sin(2x + 5)$.



含参求导运算

- 24 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 3x^2 + 2xf'(2)$, 则 $f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 25 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, $f(x) = x^2 + 2f'(2)x + 3$, 则 $f'(1) = (\quad)$.
A. -6 B. 6 C. 4 D. -4
- 26 已知函数 $f(x) = 2f'(1) \ln x - x^2$, 则 $f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 27 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 且 $f(x) = 2xf'(1) + \ln x$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 28 设 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 2$, 若 $f'(-1) = 4$, 则 a 的值等于 $(\quad)$.
A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{10}{3}$
- 29 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2xf'(e) + \ln x$, 则 $f(e) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 30 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbf{R})$, 且 $f'(-1) = f'(3) = 0$.
求 a, b 的值.

第 2 讲

导数的分类讨论





导数的应用



单调性

- (1) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 则_____.
- (2) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 则_____.
- (3) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) = 0$ 恒成立, 则_____.

步骤:

(1)

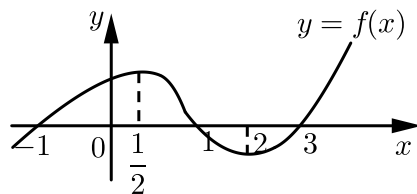
(2)

(3)

- 1 函数 $y = x + \frac{3}{x} + 2 \ln x$ 的单调递减区间是 ().
- A. $(-3, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 3)$ D. $(0, 3)$

- 2 函数 $y = x \ln x$ 在 $(0, 5)$ 上是 ().
- A. 单调增函数
- B. 单调减函数
- C. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递减
- D. 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, 5)$ 上单调递增

- 3 已知函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象如图所示, 则不等式 $xf'(x) \geq 0$ 的解集为 _____.



- 4 若函数 $f(x) = \ln x + mx + \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{4}]$
- C. $[-\frac{1}{4}, 0]$ D. $(-\infty, 1]$

- 5 若函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 在区间 $(k-1, k+1)$ 上不是单调函数, 则实数 k 的取值范围是 _____.



毫厘不伐 将用斧柯 1

- 6 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- 7 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且 $f'(x)(x \ln x^2) > 2f(x)$, 则 ().
- A. $6f(e) > 2f(e^3) > 3f(e^2)$ B. $6f(e) < 3f(e^2) < 2f(e^3)$
C. $6f(e) > 3f(e^2) > 2f(e^3)$ D. $6f(e) < 2f(e^3) < 3f(e^2)$



极值

定义:

性质:

极大(小)值点与极大(小)值的区别:

解题步骤:

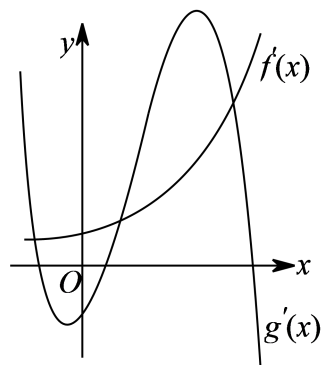
(1)

(2)

(3)

(4)

- 8 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其各自导函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 的图像如图所示, 则函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 其极值点的情况是 ().



- A. 只有三个极大值点, 无极小值点 B. 有两个极大值点, 一个极小值点
C. 有一个极大值点, 两个极小值点 D. 无极大值点, 只有三个极小值点



- 9 设 $m \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = e^x + 2mx (x \in \mathbf{R})$ 有大于零的极值点, 则 m 的取值范围是 _____.
- 10 设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = x + a \ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 有极值点, 则 a 取值范围为 ().
- A. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ B. $\left(-e, -\frac{1}{e}\right)$
C. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$ D. $(-\infty, -e) \cup \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$
- 11 函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx - 2a^2$ 在 $x = 2$ 时有极值 0, 那么 $a + b$ 的值为 ().
- A. 14 B. 40 C. 48 D. 52
- 12 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (3m+1)x + 3, & x \leq 0 \\ mx^2 + x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 恰有三个极值点, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

**最值**

定义:

解题步骤:

(1)

(2)

(3)

(4)

- 13 函数 $f(x) = 2x^3 - mx^2 (m > 0)$ 在 $[1, 2]$ 上最小值为 -8 , 则此函数在 $[1, 2]$ 上的最大值是 ().
- A. 24 B. 4 C. -2 D. -4
- 14 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$ 在点 $x = 2$ 处取得极值 $c - 16$.
- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 若 $f(x)$ 有极大值 28, 求 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值.



- 15 设函数 $f(x) = x + ax^2 + b \ln x$, 曲线 $y = f(x)$ 过 $P(1, 0)$, 且在 P 点处的切线斜率为 2.
- (1) 求 a, b 的值.
- (2) 当 $x \in [1, e]$ 时, 求 $f(x)$ 的最值.



含参的分类讨论



一次函数形式

如: $f'(x) = e^x(ax + 1) > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$

- 16 已知函数 $f(x) = x + a \ln x, a \in \mathbf{R}$.
- 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

- 17 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x - 1), a$ 为实数, 且 $a > 0$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的值域. (其中 e 为自然对数的底数)



18 设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.



二次函数形式

①能因式分解型:

如: $f'(x) = a(x+1)(x-a) > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$

②不能分解因式类型:

如: $f'(x) = ax^2 - 2x + 1$

19 已知函数 $f(x) = (2a-1)\ln x - \frac{1}{x} - 2ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.



- 20 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.
讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

- 21 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in \mathbf{R})$.
(1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.
(2) 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

- 22 设 $f(x) = a(x-5)^2 + 6\ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 6)$.
(1) 确定 a 的值.
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.



指对数函数形式

如: $f'(x) = e^x + a > 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$

如: $f'(x) = \ln x + a, x > 0, a \in \mathbf{R}$

23 设函数 $f(x) = x + ae^x$, 其中 a 实常数.

- (1) 当 $a = -1$ 时, 求函数的单调区间.
- (2) 求 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上的极值.

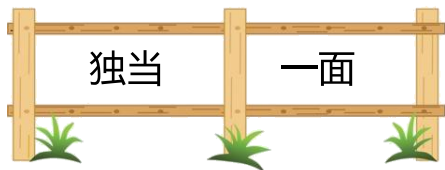
24 已知函数 $f(x) = ae^x x - 2ae^x - \frac{1}{2}x^2 + x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $(2, f(2))$ 处切线方程.
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.



- 25 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, ($a \neq 0$).
求 $f(x)$ 的单调区间;

- 26 已知函数 $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$), 求 $f(x)$ 的单调区间.



- 1 若 $f(x) = e^x$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = (\quad)$.
A. e B. $-e$ C. $2e$ D. $-2e$
- 2 设函数 $f(x) = (x + 1)e^x$, 则 $f'(1) = (\quad)$.
A. 1 B. 2 C. $3 + e$ D. $3e$
- 3 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处取得极值 10, 则 $a = (\quad)$.
A. 4 或 -3 B. -4 或 3 C. -3 D. 4
- 4 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 $(\quad)$.
A. $[-1, 1]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- 5 已知函数 $f(x) = xe^x$ ($x > 0$) 的图象上有一点 $P(x_0, e)$, 则以 P 点为切点的函数图象的切线方程为 $(\quad)$.
A. $ex - y - e = 0$ B. $2ex - y - e = 0$ C. $2ex - y - 2e = 0$ D. $ex - y - 2e = 0$
- 6 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, $f(x) = x^3 + x^2 f'(1)$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 7 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x$.
若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 1, 求实数 a 的值.

8 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4$, 且 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值和最小值.

9 已知函数 $f(x) = x^2(x + a)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

10 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2\ln x (a > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 零点的个数.

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.