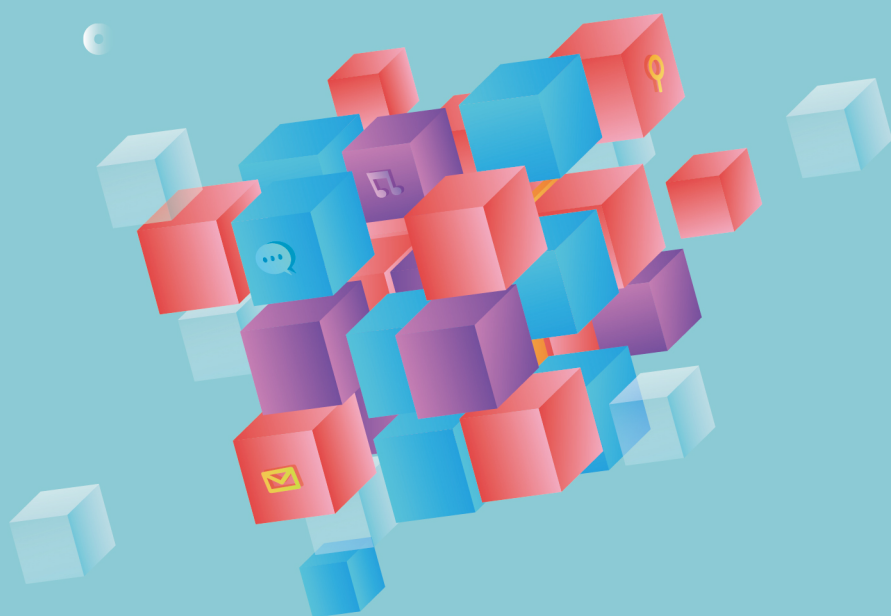


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：闫聪聪

教 研 团 队：闫聪聪 蔡磊

吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

导数是高考的重难点。每年高考分值占比很高，重要性不言而喻；一般以解答题最后一题的形式出现，题型复杂多变，是同学们学习过程中的一大难点。

本模块主要是对于导数部分非常重要典型的题型包括恒能成立问题、零点隐零点问题等进行了归类梳理，并且对于相对应的解题思路做了总结。

目 录

第 1 讲 导数基础.....	01
-----------------	----

第 2 讲 导数的分类讨论.....	05
--------------------	----



我们一起开始学习吧 o(*^_^*)o



第 1 讲

导数基础





导数的几何意义



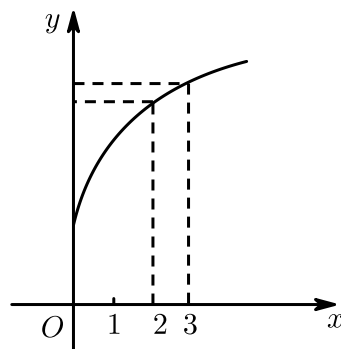
平均变化率与瞬时变化率

- 1 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = (\quad)$
- A. $\frac{1}{3}f'(x_0)$ B. $3f'(x_0)$ C. $f'(x_0)$ D. 0



几何意义

- 2 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 下列数值排序正确的是 ()



- A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$ B. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
- C. $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$ D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$
- 3 若曲线 $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 则 a 等于 ().
- A. -2 B. -1 C. 2 D. 3



求切线方程

- 4 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.
- 5 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{1+x}$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程是 ().
- A. $x + y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $x - y + 1 = 0$
- 6 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$, 则过点 $P(2, 4)$ 的切线方程是 _____.
- 7 已知直线 $y = 2x - 1$ 与曲线 $y = \ln(x + a)$ 相切, 则 a 的值为 _____.
- 8 函数 $f(x) = ax^2 + bx (a > 0, b > 0)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 2, 则 $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值是 ().
- A. 10 B. 9 C. 8 D. $3\sqrt{2}$
- 9 直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = ax^2 + 2 - \ln x$ 相切于点 $P(1, 4)$, 则 b 的值为 ().
- A. 3 B. -3 C. -1 D. 1



导数的运算



导数基础运算

10 下列求导运算正确的是 ().

A. $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = x$

B. $(xe^x)' = e^x + 1$

C. $(x^2 \cos x)' = -2x \sin x$

D. $\left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$

11 设 $f(x) = x \ln x$, 若 $f'(x_0) = 2$, 则 x_0 的值为 _____.

12 已知函数 $f(x) = 13 - 8x + \sqrt{2}x^2$, 且 $f'(x_0) = 4$, 则 $x_0 =$ _____.

13 求下列函数的导数:

(1) $y = x^2 \log_2(3x)$.

(2) $y = \frac{\cos(2x+1)}{x}$.



导数含参运算

14 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2xf'(1) + \ln x$, 则 $f'(1) =$ ().

A. $-e$

B. 1

C. -1

D. e

15 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(-1)$, 则 $f'(0)$ 等于 ().

A. 4

B. 0

C. -2

D. 2

第 2 讲

导数的分类讨论



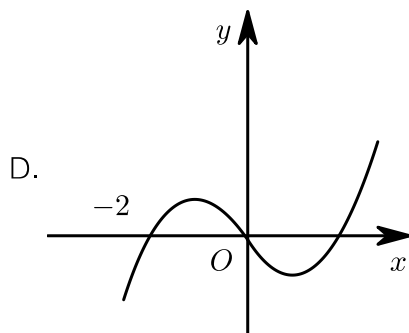
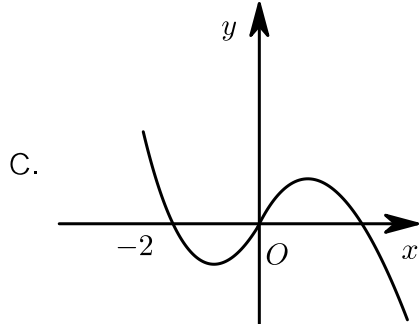
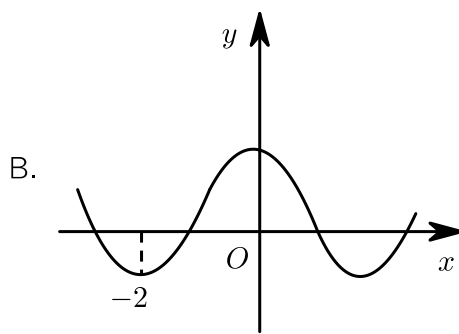
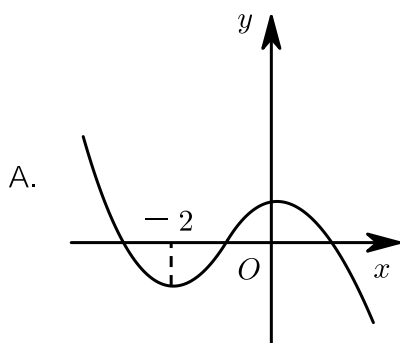
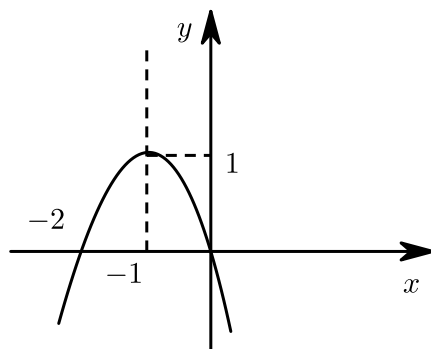


导数的应用



单调性

- 1 函数 $f(x) = (x-3)e^x$ 的单调递减区间是 ().
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, +\infty)$
- 2 “ $a > 1$ ” 是 “函数 $f(x) = a \cdot x + \cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增” 的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 3 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如右图所示, 那么函数 $f(x)$ 的图象最有可能的是 ().

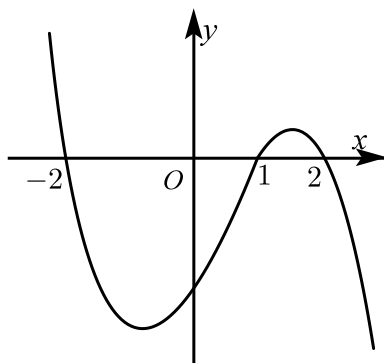


- 4 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$. 若 $a = \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$, $b = -3f(-3)$, $c = \ln \frac{1}{3}f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系正确的是 ().
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$



极值

- 5 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 函数 $y = (1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是 ().



- A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$ B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
 C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$ D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$
- 6 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2ax + (a+6) \cdot \ln x$ 有极大值和极小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 7 已知 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = -1$ 时有极值 0, 则 $a + b =$ _____.



最值

- 8 函数 $f(x) = 3x - 4x^3$, ($x \in [0, 1]$) 的最大值是 ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. 0 D. 1

- 9 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ 的极值点为 2.
- (1) 求实数 a 的值.
 - (2) 求函数 $f(x)$ 的极值.
 - (3) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最值.



分类讨论



一次函数形式

- 10 已知 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$.
求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

- 11 已知函数 $f(x) = (x+k)e^{x+1}$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值.

- 12 已知函数 $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{x} (a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的方程.
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.



二次函数形式

13 已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = mx^3 - 3(m+1)x^2 + nx + 1$ 的一个极值点, 其中 $m, n \in \mathbf{R}, m < 0$.

(1) 求 m 与 n 的关系表达式.

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

14 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

15 已知函数 $f(x) = mx^2 - x - \frac{\ln x}{m}$.

求函数 $f(x)$ 的极值.



16 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax - 2a^2 + 3a)e^x$ ($x \in \mathbf{R}$)，其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.



指对数函数形式

17 已知函数 $f(x) = (x - 2)e^x - \frac{k}{2}x^2 + kx$.

讨论 $f(x)$ 的单调性.