

04基本不等式练习题

1. 一个参数的均值



直接套用基本不等式

1 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第3题

函数 $y = x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$ 的最小值为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 有均值不等式知 $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 = 3$,

当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立 $y_{\min} = 2$.

2 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期单元测试《基本不等式(2)》第1题

设 $x > 0$, 则 $y = 3 - 3x - \frac{1}{x}$ 的最大值是 _____ .

答案 $3 - 2\sqrt{3}$

解析 $\because x > 0$, $3x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore -\left(3x + \frac{1}{x}\right) \leq -2\sqrt{3}$, $y = 3 - 3x - \frac{1}{x} \leq 3 - 2\sqrt{3}$.

故答案为 : $3 - 2\sqrt{3}$.

3

若 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 0$ ”是“ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ”的 ().

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

答案 C

解析 若 $a > 0$, 则 $a + \frac{1}{a} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$,

当且仅当 $a = 1$ 时“=”成立，

$$a < 0 \text{ 时 } , a + \frac{1}{a} \leqslant -2\sqrt{(-a) \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -2 ,$$

当且仅当 $a = -1$ 时“=”成立，

故若 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 0$ ”是“ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ”的充分必要条件.

故选C .

 配凑法（加减常数）

4

若 $x > 1$, 则 $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{2}$

答案 C

解析 $x > 1$, $x - 1 > 0$,

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x-1} \\ &= x-1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right)} + 1 = 3. \end{aligned}$$

当且反当 $x - 1 = \frac{1}{x - 1}$,

即 $x = 2$ 时成立.

故选C.

5 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第15题4分

若 $x > -1$ ，则函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 取最小值时对应的 x 的值为 _____ .

答案 0

解析 $y = x + \frac{1}{x+1}$
 $= x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2 - 1$
 $= 1 .$

当且仅当 $x + 1 = \frac{1}{x+1}$ 即 $x = 0$ 时等号成立 .

6 2016~2017学年北京高一下学期单元测试《基本不等式》第31题

求解：

已知 $x < \frac{5}{4}$ ，求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值 .

答案 1 .

解析 $\because x < \frac{5}{4}, \therefore 4x - 5 < 0 .$
 $\therefore y = 4x - 5 + \frac{1}{4x-5} + 3 = - \left[(5 - 4x) + \frac{1}{5 - 4x} \right] + 3$
 $\leq -2\sqrt{(5 - 4x) \cdot \frac{1}{5 - 4x}} + 3 = 1, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号 .}$
 $\therefore y_{\max} = 1 .$

分式型

7 2020~2021学年10月天津南开区天津中学高一上学期月考第18题10分

求下列函数的最值 .

求函数 $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} (x > 1)$ 的最小值 .

答案 $2\sqrt{3} + 2$.

解析 $\because x > 1$,

$\therefore x - 1 > 0$,

设 $x - 1 = t (t > 0)$,

$x = t + 1$,

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \frac{(t + 1)^2 + 2}{t} = t + \frac{3}{2} + 2$$

$\geq 2\sqrt{3} + 2$,

当 $x = \sqrt{3} + 1$ 时 , 取得最小值 .

2. 两个参数的均值

直接使用基本不等式

8 若 $ab = 1$, 且 $a > 0$, $b > 0$, 则

$a + b$ 的最 _____ (填“大”或“小”) 值为 _____ , 此时 $a =$ _____ , $b =$ _____ .

答案 1:小

2:2

3:1

4:1

9 2019~2020学年10月天津南开区天津市南开中学高一上学期周测B卷第2题

若 $a > b$ ，则下列不等式中正确的是（ ）.

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a + b > 2\sqrt{ab}$ D. $a^2 + b^2 > 2ab$

答案 D

解析 取 $a = 1, b = -2$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ， $a^2 > b^2$ ， $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 不成立，

因此A，B，C不成立.

对于D：

$$\because a > b,$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0, \text{ 成立.}$$

$$\therefore a^2 + b^2 > 2ab.$$

故选：D.

调和形式（1的代换）

10 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第16题4分

设 x, y 都是正数，且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$ ，则 $x + y$ 的最小值为 _____.

答案 16

解析 $x + y = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \right)$

$$= 1 + 9 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y}$$

$$\geq 10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}}$$

$$= 16,$$

当且仅当 $\frac{9x}{y} = \frac{y}{x}$ ，即 $x = 4, y = 12$ 时取得最小值.

故答案为：16.

11 2020~2021学年天津红桥区天津市复兴中学高一上学期期中第10题4分

若正数 m, n 满足 $2m + n = 1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____ .

答案 $3 + 2\sqrt{2}$

解析

$$\because 2m + n = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \cdot (2m + n)$$

$$= 3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{2m}{n}}$$

$$= 3 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{n}{m} = \frac{2m}{n}, \text{ 即 } m = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$n = \sqrt{2} - 1 \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{综上所述, } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \text{ 的最小值为 } 3 + 2\sqrt{2}.$$



配凑

12 已知实数 a, b 满足 $a > b$, 且 $ab = 2$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 1}{a - b}$ 的最小值是 _____ .

答案 $2\sqrt{5}$

解析

$$\because \text{实数 } a, b \text{ 满足 } a > b, \text{ 且 } ab = 2,$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + 1}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab + 1}{a - b} = (a - b) + \frac{5}{a - b} \geq 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{5}{a - b}} = 2\sqrt{5}, \text{ 当且仅当}$$

$$b = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{5}}{2}, a = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{2} \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + 1}{a - b} \text{ 的最小值是 } 2\sqrt{5}.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{5}.$$

13 2020~2021学年浙江杭州西湖区杭州学军中学高一上学期单元测试《基本不等式》第48题

已知 $a > b > 0$, 则 $2a + \frac{3}{a + b} + \frac{2}{a - b}$ 的最小值为 _____ .

答案 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

解析

$$\begin{aligned} \therefore 2a + \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a-b} &= 2a + b - b + \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a-b} \\ &= a + b + \frac{3}{a+b} + a - b + \frac{2}{a-b} . \quad \text{①} \end{aligned}$$

$$\because a > b > 0, \therefore a + b > 0, a - b > 0,$$

$$\therefore \text{①式} \geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{3}{a+b}} + \sqrt{(a-b) \cdot \frac{2}{a-b}} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \text{ 时, 取“=”}.$$