

03常用逻辑用语

1. 充分条件与必要条件

1. 文字语言的符号表述

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由 p 可以推出 q ，记作“ $p \Rightarrow q$ ”，

这时称 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件.

如果“若 p ，则 q ”为假命题，那么由 p 推不出 q ，记作 $p \nRightarrow q$ ，

这时称 p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件.

2. 四种条件的定义

充分条件：若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 成立的充分条件.

必要条件：若 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的必要条件.

充分且必要条件：如果 $p \Leftrightarrow q$ ，则 p 是 q 的充要条件.

既不充分也不必要条件：如果 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的既不充分也不必要条件.

3. 利用集合的思想判别四种条件

设 $A = \{x | x = \text{满足条件} P\}$ ， $B = \{x | x = \text{满足条件} q\}$.

设若 $A \subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**充分不必要条件**.

设若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**必要不充分条件**.

设若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**既不充分也不必要条件**.

设若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**充分且必要条件**.

教法备注

【教师备注】可以引导学生画图完成呦

(虽然韦恩图在实际考试中基本不出现，但是用它在这里理解的话形象且生动，在未来高二学习到导数的值域型问题时也是很有帮助哒！)

关系	$A \subsetneq B$	$B \subsetneq A$	$A \not\subset B$ 且 $B \not\subset A$	$A = B$
图示				

判断前是后的什么条件

1 2020~2021学年天津南开区高一上学期期末第4题3分

已知 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 则“ $\frac{1}{a} < 1$ ”是“ $a > 1$ ”的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 由 $\frac{1}{a} < 1$ 得 $a < 0$ 或 $a > 1$,
 $\therefore \frac{1}{a} < 1$ 是“ $a > 1$ ”成立的必要不充分条件.
 故选: B.

2 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第3题5分

设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的().

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 不等式 $2x^2 + x - 1 > 0$ 的解集为 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$,
 所以“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”成立的充分不必要条件.

3 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四十二中学高三上学期月考第5题5分

D. 既不充分也不必要条件

故“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的必要不充分条件.

D. 既不充分又不必要条件

故选A.

5 2019~2020学年10月天津和平区天津市第二南开中学高一上学期月考第8题3分

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $p: a < b$, $q: \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$, 则 p 是 q 的 () .

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要

答案 B

解析 $\because \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$,

$\therefore a < b < 0$.

当 $a < b$, 取 $a = 2, b = 3$, 不满足 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

故选 B.

6 2019~2020学年天津河西区高一上学期期末第2题3分

设 a, b 是实数, 则“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 D

解析 方法一: 若 $0 > a > b$, 则 $a^2 < b^2$, 故非充分条件;

若 $|a| > 0 > b > a$, 也满足 $a^2 > b^2$, 故非必要条件.

方法二: 令 $a = 1, b = -1$, 满足 $a > b$, 但不满足 $a^2 > b^2$, 即“ $a > b$ ”不能推出“ $a^2 > b^2$ ”; 再令

$a = -1, b = 0$, 满足 $a^2 > b^2$, 但不满足 $a > b$, 即“ $a^2 > b^2$ ”不能推出“ $a > b$ ”, 所以“ $a > b$ ”是“

$a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件.

故选 D.

根据条件关系求解参数取值范围

7 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第13题

若“ $x > a$ ”是“ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ”的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $[3, +\infty)$

解析 由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < -1$,
若“ $x > a$ ”是“ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ”的充分不必要条件 ,
则 $a \geq 3$, 即实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.
故答案为 $[3, +\infty)$.

8 2018~2019学年天津河东区天津市第七中学高二上学期期中第9题4分

若“ $x \geq a$ ”是“ $x^2 - x - 2 \geq 0$ ”的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $[2, +\infty)$

解析 解不等式 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 可得 $x \leq -1$, 或 $x \geq 2$,
要使“ $x \geq a$ ”是“ $x^2 - x - 2 \geq 0$ ”的充分不必要条件 ,
则需集合 $\{x | x \geq a\}$ 是集合 $\{x | x \leq -1, \text{ 或 } x \geq 2\}$ 的真子集 ,
故只需 $a \geq 2$ 即可 ,
故实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$,
故答案为 : $[2, +\infty)$.

9 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第6题

条件 $p: |x - m| \leq 2$, 条件 $q: -1 \leq x \leq n$, 若 p 是 q 的充分条件，则 n 的最小值为 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 C

解析 条件 $p: |x - m| \leq 2$ 可得 $n - 2 \leq x \leq m + 2$,
条件 $q: -1 \leq x \leq n$,

若 p 是 q 的充分条件,

则 $-1 = m - 2, m + 2 \leq n, M = 1, n \geq 3,$

则 n 的最小值为3.

故选C.

10 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高二上学期月考第13题5分

已知 $p: m - 1 < x < m + 1, q: (x - 2)(x - 6) < 0$, 且 q 是 p 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 _____.

答案 [3, 5]

解析 $q: 2 < x < 6,$

$\because q$ 是 p 的必要不充分,

$$\therefore \begin{cases} m - 1 \geq 2 \\ m + 1 \leq 6 \end{cases},$$

$$\therefore 3 \leq m \leq 5.$$

11 2019~2020学年9月天津河北区天津外国语学院附属外国语学校高一上学期月考第5题4分

已知不等式 $x^2 - 2mx + m^2 - 4 > 0$ 成立的必要不充分条件是 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$, 则实数 m 的最大值为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 $\because x^2 - 2mx + m^2 - 4 > 0,$

$$[x - (m - 2)][x - (m + 2)] > 0,$$

$$\text{又} \because m + 2 > m - 2,$$

$$\therefore x < m - 2 \text{ 或 } x > m + 2,$$

又 $\because "x \leq 1" \text{ 或 } "x \geq 2"$ 是 $"x^2 - 2mx + m^2 - 4 > 0"$ 的必要不充分条件,

$$\therefore (-\infty, m - 2) \cup (m + 2, +\infty) \text{ 是 } (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \text{ 的真子集},$$

$$\therefore m - 2 \leq 1,$$

$$m + 2 \geq 2,$$

$$\therefore 0 \leq m \leq 3,$$

$$\therefore m_{\max} = 3.$$

故选C.

12 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第13题4分

已知 $p: x > 1$ 或 $x < -3$, $q: x > a$ (a 为实数), 若 $\neg q$ 的一个充分不必要条件是 $\neg p$, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案 $[1, +\infty)$

解析 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的一个充分不必要条件,

则 q 是 p 的一个充分不必要条件,

$\therefore$ 条件 $p: x > 1$ 或 $x < -3$, 条件 $q: x > a$,

$\therefore$ 集合 q 是集合 p 的真子集, $q \subsetneq p$,

即 $a \in [1, +\infty)$.

故答案为: $[1, +\infty)$.

使命题成立的某某条件求解

13 2018~2019学年12月天津和平区天津市第二十一中学高二上学期月考第2题3分

不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个必要不充分条件是().

A. $x \geq 0$

B. $x < 0$ 或 $x > 2$

C. $x \leq -\frac{1}{2}$

D. $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$

答案 B

解析 解不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$,

$$\text{得 } x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2},$$

故不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个必要不充分条件是： $x < 0$ 或 $x > 2$.

故选B .

14 2018~2019学年天津河东区高二上学期期中第7题3分

关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 的解集为非空集的必要不充分条件是 () .

A. $a \geq 1$

B. $a \leq 1$

C. $a \leq 2$

D. $a \leq 0$

答案 C

解析 $ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 解集为空集时, $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4 - 4a < 0 \end{cases}$, 解得 $a > 1$,

$\therefore ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 解集为非空集合,

$\therefore a \leq 1$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 < 0$ 解集为非空集合的一个必要不充分条件,

$\therefore a \leq 2$ 满足.

故选C .

15 使得“ $a > b$ ”成立的一个充分不必要条件是 () .

A. $a > b + 1$

B. $\frac{a}{b} > 1$

C. $a^2 > b^2$

D. $a^3 > b^3$

答案 A

解析 A. 若 $a > b + 1$, 则 $a > b$ 成立, 即充分性成立, 反之若 $a > b$, 则 $a > b + 1$ 不一定成立, 即 $a > b + 1$ 是 $a > b$ 成立的一个充分不必要条件;

B. 当 $b < 0$ 时, 由 $\frac{a}{b} > 1$ 得 $a < b$, 则 $a > b$ 不成立, 即 $\frac{a}{b} > 1$ 不是充分条件, 不满足条件;

C. 由 $a^2 > b^2$ 得 $a > b$ 或 $a < -b$, 则 $a^2 > b^2$ 不是充分条件, 不满足条件;

D. 由 $a^3 > b^3$ 得 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$ 是 $a > b$ 成立的充要条件, 不满足条件.

16 2020~2021学年10月天津和平区天津市汇文中学高一上学期月考第5题3分

已知 $p: x^2 - x < 0$ ，那么命题 p 的一个必要不充分条件是（ ）.

A. $0 < x < 1$

B. $-1 < x < 1$

C. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{2} < x < 2$

答案 B

解析 $p: 0 < x < 1$,

$\therefore$ 选项是 p 命题的必要不充分条件,

$\therefore p$ 是选项的子集.

故选B.

2. 全称量词与存在量词及其命题

1. 存在量词及存在量词命题

(1) 存在量词

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号“ $\exists$ ”表示.

(2) 存在量词命题

①定义：含有存在量词的命题，叫做存在量词命题.

②符号表示：存在命题“存在 M 中的元素 x_0 ，使 $p(x_0)$ 成立”

可用符号简记为 $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ，读作“存在 x_0 属于 M ，使 $p(x_0)$ 成立”.

教法备注

【教师备注】有些命题虽没有写出存在量词，但其意义具备“存在”“有一个”等特征，这样的命题也是存在量词命题.

命题	存在命题“ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ”
表述方法	①存在 $x_0 \in M$, 使 $p(x_0)$ 成立
	②至少有一个 $x_0 \in M$, 使 $p(x_0)$ 成立
	③对有些 $x_0 \in M$, $p(x_0)$ 成立
	④对某个 $x_0 \in M$, $p(x_0)$ 成立
	⑤有一个 $x_0 \in M$, 使 $p(x_0)$ 成立

2.全称量词及全称命题

(1)全称量词

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“ $\forall$ ”表示.

(2)全称命题

①定义：含有全称量词的命题，叫做全称命题.

②符号表示：全称命题“对 M 中任意一个 x , 有 $p(x)$ 成立”

可用符号简记为 $\forall x \in M, p(x)$, 读作“对任意 x 属于 M , 有 $p(x)$ 成立”.

教法备注

【教师备注】注意：全称命题含有全称量词，有些全称命题中的全称量词是省略的，理解时需把它补充出来

例如，命题“平行四边形对角线互相平分”应理解为“所有的平行四边形对角线都互相平分”.

命题	全称命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”
表述方法	①对所有的 $x \in M$, $p(x)$ 成立
	②对一切 $x \in M$, $p(x)$ 成立
	③对每一个 $x \in M$, $p(x)$ 成立
	④任选一个 $x \in M$, $p(x)$ 成立
	⑤凡 $x \in M$, 都有 $p(x)$ 成立

3.含有一个量词命题的否定

(1)一般地，对于含有一个量词的全称命题的否定，有下面的结论：

全称命题 $p: \forall x \in M, p(x)$,

它的否定 $\neg p: \exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$.

(2) 一般地, 对于含有一个量词的**存在量词命题的否定**, 有下面的结论:

存在量词命题 $p: \exists x \in M, p(x_0)$,

它的否定 $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$.

4. “一般命题的否定”与“含有一个量词的命题的否定”的辨析

(1) 一般命题的否定:

通常是在条件成立的前提下否定其结论, 得到真假性完全相反的两个命题;

(2) 含有一个量词的命题的否定:

是在否定结论的同时, 改变量词的属性

即将全称量词改为存在量词, 存在量词改为全称量词.

教法备注

【教师备注】含有一个量词的命题的否定与一般命题的否定**相同**, 含有一个量词的命题的否定的关键也是对关键词的否定



存在量词命题的否定

17

2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第3题4分

已知命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \leq 0$, 则 $\neg p$ 为()

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} > 0$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$

C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$

答案

D

解析

解: 由特称命题的否定是全称命题得 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R},$ 均有 $x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$,

故选: D.

18

2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第10题4分

命题: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ 的否定是 _____.

答案 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \neq 0$.

解析 命题： $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ 是存在性命题，
 $\therefore$ 原命题的否定是全称命题，
 $\therefore$ 命题： $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ 的否定为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \neq 0$.

19 2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第10题4分

命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”的否定是：_____.

答案 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$

解析 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$ ”.



全称量词命题的否定

20 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第2题4分

命题 $p: \forall x \geq 0, x^2 - ax + 3 > 0$ ，则 $\neg p$ 为 () .

- A. $\forall x < 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$
- B. $\exists x \geq 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$
- C. $\forall x \geq 0, x^2 - ax + 3 < 0$
- D. $\exists x < 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$

答案 B

解析 因为全称命题的否定是特称命题，
 所以命题“： $\forall x \geq 0, x^2 - ax + 3 > 0$ ”的否定是 $\exists x \geq 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$.
 故选B.

21 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第2题3分

命题“ $\forall x \in (0, 1), x^2 - x < 0$ ”的否定是 () .

- A. $\exists x_0 \notin (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$
- B. $\exists x_0 \in (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$
- C. $\forall x_0 \notin (0, 1), x_0^2 - x_0 < 0$
- D. $\forall x_0 \in (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$

答案 B

解析 ∵“全称命题”的否定一定是“特称命题”，

∴命题“ $\forall x \in (0, 1), x^2 - x < 0$ ”的否定是 $\exists x_0 \in (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$.

故选B .

22 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第6题3分

已知命题 $p: \forall x, y \in (0, 3), x + y < 6$, 则命题 p 的否定为 () .

- A. $\forall x, y \in (0, 3), x + y \geq 6$
- B. $\forall x, y \notin (0, 3), x + y \geq 6$
- C. $\exists x_0, y_0 \notin (0, 3), x_0 + y_0 \geq 6$
- D. $\exists x_0, y_0 \in (0, 3), x_0 + y_0 \geq 6$

答案 D

解析 命题： $p: \forall x, y \in (0, 3), x + y < 6$,

命题 p 的否定为 $\exists x_0, y_0 \in (0, 3), x_0 + y_0 \geq 6$.

故选D .

23 2020~2021学年天津和平区天津市第二十一中学高一上学期期中第10题4分

已知命题 $p: \forall x > 0$, 总有 $(x + 1) \cdot x > 1$, 则 p 的否定为 _____ .

答案 $\exists x > 0$, 使得 $(x+1) \cdot x \leq 1$

解析 “ $\forall x > 0$, 总有 $(x+1) \cdot x > 1$ ”的否定是“ $\exists x > 0$, 使得 $(x+1) \cdot x \leq 1$ ” .