

03集合至基本不等式阶段测练习题

满分100，计时60min

Q1：集合的基本交并补运算

Q2：不等式性质

Q3：集合代表元素的确定

Q4：命题的否定

Q5：子集关系

Q6：充分、必要条件与解不等式

Q7：含参不等式的恒能成立问题

Q8：基本不等式的实际应用

Q9：集合确定元素的含参问题

Q10：集合的子集关系

Q11：直接使用基本不等式

Q12：集合的运算

Q13：不等式性质与充分、必要条件

Q14：含参一元二次不等式的解集问题

Q15：解不等式

Q16：集合的含参交并关系

Q17：基本不等式1的代换

Q18：充分、必要条件与解含参不等式

1. 选择题

(本大题共8小题，每小题4分，共32分)

1 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第1题4分

(4分) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合 $S = \{1, 3, 5\}$ ， $T = \{3, 6\}$ ，则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于()。

A. $\emptyset$

B. $\{2, 4, 7, 8\}$

C. $\{1, 3, 5, 6\}$

D. $\{2, 4, 6, 8\}$

答案 B

解析 $\because S \cup T = \{1, 3, 5, 6\}$,
 $\therefore \complement_U(S \cup T) = \{2, 4, 7, 8\}$.
 故选B.

2 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第2题4分

(4分) 若 $x > y$, $m > n$, 则下列不等式正确的是 ().

- A. $x - m > y - n$ B. $xm > yn$ C. $\frac{x}{n} > \frac{y}{m}$ D. $m - y > n - x$

答案 D

解析 取 $x = 2$, $y = 1$, $m = 10$, $n = 1$, 则A中不等式不成立;
 取 $x = 4$, $y = 1$, $m = -1$, $n = -2$, 则B中不等式不成立;
 取 $x = 4$, $y = 1$, $m = -1$, $n = -2$, 则C中不等式不成立;
 由 $x > y$, 得 $-y > -x$, 又 $m > n$, $\therefore m - y > n - x$, D正确.

3 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第3题4分

(4分) 集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则集合 $M \cap N$ 为 ().

- A. $\{3, -1\}$ B. $(3, -1)$ C. $\{(3, -1)\}$ D. $\{x = 3, y = -1\}$

答案 C

解析 本题主要考查集合的基本运算.

两个集合的交集为两条直线的交点坐标.

$$\text{解方程组} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases},$$

因为集合 M 和 N 均为点集,

所以 $M \cap N$ 也是点集,

因此, $M \cap N = \{(3, -1)\}$.

故选C.

4 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第4题4分

(4分) 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为().

- A. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ C. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$

答案 C

解析 因为特称命题的否定是全称命题, $\neg p: \forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$.

故选C.

5 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第5题4分

(4分) 已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 C

解析 已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$,

故 M 可以取: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

故选C.

6 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第6题4分

(4分) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $1 < x < 2$ 是 $|x - 2| < 1$ 的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要

答案 A

解析 解不等式 $|x - 2| < 1$, 得 $1 < x < 3$,

∴“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的充分而不必要条件.

故选A.

7 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第7题4分

(4分) 若不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是().

A. $-2 < m < 2$

B. $-2 < m \leq 2$

C. $m < -2$ 或 $m \geq 2$

D. $m < 2$

答案 B

解析 因为不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立,

∴原不等式等价于: $(m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 4 < 0$,

当 $m = 2$ 时, 对 $x \in \mathbf{R}$, 不等式恒成立,

当 $m \neq 2$ 时, 则有: $\begin{cases} m - 2 < 0 \\ \Delta = 4(m - 2)^2 + 16(m - 2) < 0 \end{cases}$

∴ $-2 < m < 2$,

综上所述, m 的取值范围为: $(-2, 2]$,

故选: B.

8 2018~2019学年10月天津南开区天津市第二十五中学高二上学期月考第9题3分

(4分) 要制作一个容积为 4m^3 , 高为 1m 的无盖长方体容器, 已知容器的底面造价是每平方米20元, 侧面造价是每平方米10元, 则该容器的最低总造价是().

A. 80元

B. 120元

C. 160元

D. 240元

答案 C

解析 设该容器的总造价为 y 元, 长方体的底面矩形的长为 $x\text{m}$, 因为无盖长方体的容积为 4m^3 , 高为 1m , 所以长方体的底面矩形的宽为 $\frac{4}{x}\text{m}$,

依题意, 得 $y = 20 \times 4 + 10 \cdot \left(2x + \frac{2 \times 4}{x} \right) = 80 + 20 \left(x + \frac{4}{x} \right)$,

令 $g(x) = x + \frac{4}{x}$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ ($x = -2$ 舍去),

经计算可知当 $x = 2$ 时, y 取最小值,

$$\therefore y_{\min} = 80 + 20 \times \left(2 + \frac{4}{2}\right) = 160 .$$

故选C .

2. 填空题

(本大题共6小题, 每小题4分, 共24分)

9 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第9题4分

(4分) 设集合 $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{a + 2, a^2 + 4\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____ .

答案 1

解析 $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{a + 2, a^2 + 4\}$,

且 $A \cap B = \{3\}$,

$$\therefore a + 2 = 3 \text{ 或 } a^2 + 4 = 3 ,$$

解得 $a = 1$,

经检验 $a = 1$ 时, $B = \{3, 5\}$ 符合,

故 $a = 1$.

故答案为1 .

10 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第10题4分

(4分) 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为 _____ .

答案 3

解析 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$,

$$\therefore A \cap B = \{1, 3\} ,$$

则 $A \cap B$ 的真子集有: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$.

故答案为：3 .

11 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第11题4分

(4分) 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 _____ .

答案 4

解析 $\because x > 0$,

根据基本不等式 ,

$$x + \frac{4}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 .$$

12 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第12题4分

(4分) 集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 \leqslant 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 中所有元素之积为 _____ .

答案 0

解析 $\because x^2 + x - 2 \leqslant 0$, $\therefore (x+2)(x-1) \leqslant 0$, 解得 $-2 \leqslant x \leqslant 1$,

又 $\because x \in \mathbf{Z}$, $\therefore x = -2, -1, 0, 1$.

$\therefore A = \{-2, -1, 0, 1\}$.

$\therefore (-2) \times (-1) \times 0 \times 1 = 0$,

$\therefore$ 集合 A 中所有元素之积为0 .

故答案为0 .

13 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第13题4分

(4分) 下列命题：

①“ $x > 2$ 且 $y > 3$ ”是“ $x + y > 5$ ”的充要条件；

②“ $b^2 - 4ac < 0$ ”是“不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为 $\mathbf{R}$ ”的充要条件；

③“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充要条件；

④设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的充分不必要条件 .

其中真命题的序号为 _____ .

答案 ④

解析 对于①, 当 $x > 2$ 且 $y > 3$ 时, 得出 $x + y > 5$, 充分性成立,

当 $x + y > 5$ 时, 不能得出 $x > 2$ 且 $y > 3$, 必要性不成立,

是充分不必要条件, ①错误;

对于②, $b^2 - 4ac < 0$ 时, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集不一定为 $\mathbf{R}$, 充分性不成立;

不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为 $\mathbf{R}$ 时, 得出 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$, 必要性成立,

是必要不充分条件, ②错误;

对于③, $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 充分性成立,

$\frac{1}{a} < 1$ 时, 有 $a < 0$ 或 $a > 1$, 必要性不成立, 是充分不必要条件, ③不正确;

对于④, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ 时, $x^2 + y^2 \geq 4$, 充分性成立,

$x^2 + y^2 \geq 4$ 时,

不能得出 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$, 必要性不成立, 是充分不必要条件. ④正确,

故选④.

14 2018~2019学年10月天津南开区天津市第二十五中学高二上学期月考第15题3分

(4分) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + a^2 - 1 \leq 0$ 的解集为 $[-1, +\infty)$, 则实数 $a + b$ 的值为 _____ .

答案 -1

解析 $ax^2 + bx + a^2 - 1 \leq 0$ 解集为 $[-1, +\infty)$,

$$\therefore a = 0,$$

$$\therefore bx - 1 \leq 0 \text{ 即 } bx \leq 1,$$

$$\therefore b = -1,$$

$$\therefore a + b = 0 - 1 = -1.$$

故答案为: -1.

3. 解答题

(本大题共4小题 , 共44分)

15 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第15题9分

(14分) 解不等式 :

(1) (4分) $(x+2)(x-4) > 4$.

(2) (5分) $\frac{2x-5}{x-3} \geq 4$.

(3) (5分) $2 \leq |2x-4| \leq 5$.

答案

(1) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

(2) $x \in \left(3, \frac{7}{2}\right]$.

(3) $x \in \left[3, \frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

解析

(1) $(x+2)(x-4) > 4$,

$$x^2 + x - 2 > 4 ,$$

$$x^2 + x - 6 > 0 ,$$

$$(x+3)(x-2) > 0 ,$$

$$\therefore x > 2 \text{ 或 } x < -3 ,$$

$$\text{故 : } x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) .$$

(2) $\frac{2x-5}{x-3} \geq 4$,

$$\frac{2x-5}{x-3} - 4 \geq 0 ,$$

$$\frac{-2x+7}{x-3} \geq 0 ,$$

$$\frac{2x-7}{x-3} \leq 0 ,$$

$$\text{故 } 3 < x \leq \frac{7}{2} ,$$

$$\text{即 } x \in \left(3, \frac{7}{2}\right] .$$

(3) $2 \leq |2x-4| \leq 5$,

$$\therefore 2 \leq 2x-4 \leq 5 \text{ 或 } -5 \leq 2x-4 \leq -2 ,$$

$$\text{即 } 3 \leq x \leq \frac{9}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 ,$$

$$\text{故 } x \in \left[3, \frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right] .$$

16 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第16题10分

(10分) 已知集合 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \mid 2m - 1 \leq x \leq m + 1\}$.

(1) (4分) 当 $m = -3$ 时, 求 $A \cap B$.

(2) (6分) 当 $B \subseteq A$ 时, 求实数 m 的取值范围的集合.

教法备注

【教法备注】不要忘记讨论 B 是空集的情况

答案

(1) $A \cap B = \{x \mid -3 \leq x \leq -2\}$.

(2) $m \geq -1$.

解析

(1) $m = -3$ 时, $B = \{-7 \leq x \leq -2\}$,

则 $A \cap B = \{x \mid -3 \leq x \leq -2\}$.

(2) 根据题意, 分2种情况讨论:

① $B = \emptyset$, 则 $2m - 1 > m + 1$,

即 $m > 2$ 时, $B \subseteq A$ 成立;

② $B \neq \emptyset$, 则 $2m - 1 \leq m + 1$,

即 $m \leq 2$ 时, 必有 $\begin{cases} 2m - 1 \geq -3 \\ m + 1 \leq 4 \end{cases}$,

解可得 $-1 \leq m \leq 3$,

又由 $m \leq 2$,

此时 m 的取值范围是 $-1 \leq m \leq 2$,

综合①②可得, m 的取值范围是 $m \geq -1$.

17 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第17题12分

(8分) 解答下列各题:

(1) (4分) 已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x - 5}$ 的最大值.

(2) (4分) 已知 $x > 0$, $y > 0$, $2x + 5y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

答案

(1) 1 .

(2) $7 + 2\sqrt{10}$.

解析

(1) $\because x < \frac{5}{4}$,

$$\therefore 4x - 5 < 0 ,$$

$$\therefore y = 4x - 2 + \frac{1}{4x - 5}$$

$$= (4x - 5) + \frac{1}{4x - 5} + 3$$

$$= 3 - \left[(5 - 4x) + \frac{1}{5 - 4x} \right]$$

$$\leq 3 - 2\sqrt{(5 - 4x) \cdot \frac{1}{5 - 4x}}$$

$$= 3 - 2$$

$$= 1 ,$$

当且仅当 $5 - 4x = \frac{1}{5 - 4x}$, 即 $x = 1$ 时取等号 .

(2) $\because 2x + 5y = 1$,

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (2x + 5y)$$

$$= 7 + \frac{2x}{y} + \frac{5y}{x} \geq 7 + 2\sqrt{10} ,$$

当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{5y}{x}$, 即 $5y^2 = 2x^2$ 时 , 等号成立 ,

故 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 $7 + 2\sqrt{10}$.

18

2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学高一上学期月考第18题13分

(12分) 已知 $p: \frac{x-5}{x-2} < 0$, $q: x^2 - 4mx + 3m^2 < 0$, 其中 $m > 0$.

(1) (6分) 已知 $m = 1$, 求 p 与 q 对应不等式的解集 .

(2) (6分) 若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件 , 求实数 m 的取值范围 .

答案

(1) $x \in (1, 3)$.

(2) $m \in \left[\frac{5}{3}, 2 \right]$.

解析

(1) $p: \frac{x-5}{x-2} < 0$, 故 $2 < x < 5$, 即 $x \in (2, 5)$,

当 $m = 1$ 时 , $q: x^2 - 4x + 3 < 0$, $(x-1)(x-3) < 0$, $1 < x < 3$, 即 $x \in (1, 3)$.

(2) 由 (1) 知 : $p: x \in (2, 5)$,

$$q: x^2 - 4mx + 3m^2 < 0, (x - 3m)(x - m) < 0, m < x < 3m, x \in (m, 3m),$$

$$\neg p: x \in (-\infty, 2] \cup [5, +\infty), \neg q: x \in (-\infty, m] \cup [3m, +\infty),$$

若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 则 $\begin{cases} m \leq 2 \\ 3m \geq 5 \end{cases}$, 解得: $\frac{5}{3} \leq m \leq 2$,

$$\text{故 } m \in \left[\frac{5}{3}, 2 \right].$$