

02函数至基本初等函数难点攻克练习题

1. 函数的性质

1 2020~2021学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第8题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，设 $a = f(\log_4 7)$ ， $b = f\left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right)$ ， $c = f(0.2^{0.6})$ ，则 a, b, c 的大小关系为() .

A. $c < b < a$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $a < b < c$

答案 C

解析

$$|\log_4 7| = \log_4 7,$$

$$\left|\log_{\frac{1}{2}} 3\right| = \log_2 3 = \log_4 9 > \log_4 7,$$

$$|0.2^{0.6}| = 0.2^{0.6} < 0.2^0 = 1,$$

$$\left|\log_{\frac{1}{2}} 3\right| > |\log_4 7| > |0.2^{0.6}|,$$

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数，

又 $\because$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单减，

$$\therefore b > a > c.$$

故选C .

2 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第15题4分

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x_0) > 1$ ，则 x_0 的取值范围是 ____ .

答案 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

解析

解：①当 $x_0 \leq 0$ 时，可得 $2^{-x_0} - 1 > 1$ ，即 $2^{-x_0} > 2$ ，所以 $-x_0 > 1$ ，得 $x_0 < -1$ ；

②当 $x_0 > 0$ 时， $x_0^{0.5} > 1$ ，可得 $x_0 > 1$.

故答案为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2), & x \geq 1 \\ 2^{ax-1}, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围为 ().

- A. $(0, +\infty)$
B. $(-\infty, 1]$
C. $(0, 1)$
D. $(0, 1]$

D

故选D.

() .

- A. $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$
 B. $[-1, 1]$
 C. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
 D. $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

D

$$\therefore -2b + 1 + b = 0,$$

$$\therefore b = 1 ,$$

$$\therefore \text{定义域为} [-2, 2] ,$$

又 $\therefore$ 在 $[-2, 0]$ 上为增函数 ,

$$\therefore f(x-1) \leq f(2x) ,$$

$$\therefore |2x| \leq |x-1| ,$$

$$\therefore 4x^2 \leq x^2 - 2x + 1 ,$$

$$\therefore 3x^2 + 2x - 1 \leq 0 ,$$

$$(3x-1)(x+1) \leq 0 ,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \frac{1}{3} ,$$

$$\text{又} \therefore -2 \leq x-1 \leq 2 ,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3 ,$$

$$\text{又} \therefore -2 \leq 2x \leq 2 ,$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 1 ,$$

$$\text{综上} , x \in \left[-1, \frac{1}{3}\right] .$$

故选D .

5 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第16题

已知 $f(x)$ 的定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = 2x - x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式 .

(2) 设 $0 < a < b$, 当 $x \in [a, b]$ 时 , $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, 求 a, b 的值 .

答案

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases} .$$

$$(2) a = 1, b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

解析

$$(1) x < 0 ,$$

$$\therefore -x > 0 ,$$

$$\therefore f(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2 ,$$

$$\therefore f(x) = -f(-x) = x^2 + 2x ,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases} .$$

(2) $\because 0 < a < b$,

当 $x \geq 0$ 时,

$$f(x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 增, $(1, +\infty)$ 减,

若 $0 < a < b < 1$,

$\therefore$ 值域为 $[2a - a^2, 2b - b^2]$,

$\therefore f(x)$ 值域为 $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{b} = 2a - a^2 \\ \frac{1}{a} = 2b - b^2 \end{cases},$$

$\therefore a = b = 1$ 舍,

若 $1 < a < b$ 可得值域为 $[2b - b^2, 2a - a^2]$,

$$\therefore \begin{cases} 2b - b^2 = \frac{1}{b} \\ 2a - a^2 = \frac{1}{a} \end{cases},$$

$\therefore a = b = 1$.

若 $0 < a \leq 1 \leq b$,

可得 $f(x)_{\max} = f(1) = 2 - 1 = 1$,

最小值在 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得,

$\therefore$ 值域为 $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$,

$$\therefore \frac{1}{a} = 1, \therefore a = 1,$$

$$\text{若 } \frac{1}{b} = 2a - a^2,$$

$$\therefore b = 1 \text{ (舍)},$$

$$\text{若 } \frac{1}{b} = 2b - b^2,$$

$$\therefore (b-1)(b^2 - b - 1) = 0,$$

$$\therefore b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

6 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第14题4分

函数 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 a 的值是 _____.

答案 $\frac{1}{2}$

解析

方法一：①若 $a > 1$,

则 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增 , $y = \log_a (x + 1)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增 ,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增 ,

$$\therefore f(1) + f(0) = a ,$$

$$\therefore a + \log_a 2 + 1 + 0 = a ,$$

$$\therefore \log_a 2 = -1 ,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} , \text{ 与 } a > 1 \text{ 矛盾 .}$$

②若 $0 < a < 1$,

$y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减 ,

$y = \log_a (x + 1)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减 ,

$$\therefore f(1) + f(0) = a ,$$

$$\therefore a + \log_a 2 + 1 + 0 = a ,$$

$$\therefore \log_a 2 = -1 ,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} . \text{ 综上 , } a = \frac{1}{2} .$$

方法二： $\because f(x) = a^x + \log_a (x + 1)$,

$\therefore f(x)$ 为单增或单减 ,

在 $[0, 1]$ 的两端点处取最值 ,

$$\therefore f(0) + f(1) = a ,$$

$$\text{即 } 1 + a + \log_a 2 = a ,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} .$$

2. 零点问题

7

2019~2020学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第4题5分

函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是()

A. $(0, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(3, 4)$

D. $(4, +\infty)$

C

∴函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在的区间是 $(3, 4)$.

2019~2020学年天津和平区高一上学期期末第3题4分

D. (4, 5)

C

故选C.

3. 综合解答题

2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第22题10分

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2kx + 2$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 求函数 $g(x)$ 的最小值.

答案

- (1) $f(x) = x^2 - 2x$.
 (2) $g(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - 2k, k \leq 0 \\ -k^2 - 2k + 1, k > 0 \end{cases}$.

解析

- (1) 由题意得 $c = 0$, $a(x+2)^2 + b(x+2) - ax^2 - bx = 4ax + 4a + 2b = 4x$,
 即 $a = 1$, $b = -2$,
 $\therefore f(x) = x^2 - 2x$.
 (2) $g(x) = x^2 - 2(1+k)x + 2$, $x \in [1, +\infty)$,
 对称轴为 $x = k+1$,
 ① 当 $k+1 \leq 1$ 时 , 即 $k \leq 0$ 时 , $g(x)_{\min} = g(1) = 1 - 2k$;
 ② 当 $1 < k+1$ 时 , 即 $k > 0$ 时 , $g(x)_{\min} = g(k+1) = -k^2 - 2k + 1$;
 综上 , $g(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - 2k, k \leq 0 \\ -k^2 - 2k + 1, k > 0 \end{cases}$.

10

2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第17题10分

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^x + 1}$ 是奇函数 .

- (1) 求实数 a 的值 .
 (2) 判断 $f(x)$ 的单调性并用定义证明 .
 (3) 已知不等式 $f\left(\log_m \frac{3}{4}\right) + f(-1) > 0$ 恒成立 , 求实数 m 的取值范围 .

答案

- (1) $a = 1$.
 (2) 证明见解析 .
 (3) m 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

解析

- (1) $\because$ 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^x + 1}$ 是奇函数 ,
 $\therefore f(0) = 0$, 即 $\frac{-2^0 + a}{2^0 + 1} = 0$, 解得 : $a = 1$,
 $\therefore f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^x + 1}$, 定义域是 $\mathbf{R}$ 关于原点对称 $f(-x) = \frac{-2^{-x} + 1}{2^{-x} + 1} = \frac{-1 + 2^x}{2^x + 1} \cdot \frac{2^x}{1 + 2^x}$
 $= \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -f(x)$,
 $\therefore$ 当 $a = 1$ 时 , $f(x)$ 是奇函数 ,
 综上所述 , 结论是 : $a = 1$.
 (2) $f(x)$ 是减函数 , 证明如下 :

设 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则: } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{-2^{x_1} + 1}{2^{x_1} + 1} - \frac{-2^{x_2} + 1}{2^{x_2} + 1} \\ &= \frac{(2^{x_2} + 1)(-2^{x_1} + 1) - (2^{x_1} + 1)(1 - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} \\ &= \frac{2(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}, \end{aligned}$$

$\therefore x_1 < x_2$,

$\therefore$ 根据指数函数单调性得: $0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}$,

$\therefore 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0, 2^{x_1} + 1 > 0, 2^{x_2} + 1 > 0$,

$\therefore \frac{2(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} > 0$, 即 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

综上所述, 结论是: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调递减.

(3) 不等式 $f\left(\log_m \frac{3}{4}\right) + f(-1) > 0$

$$\Rightarrow f\left(\log_m \frac{3}{4}\right) > -f(-1),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore -f(-1) = f(1),$$

$$\therefore f\left(\log_m \frac{3}{4}\right) > f(1),$$

$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

$$\therefore \log_m \frac{3}{4} < 1 = \log_m m,$$

$\therefore$ 当 $0 < m < 1$ 时, $y = \log_m x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\frac{3}{4} > m > 0, \text{ 即: } 0 < m < \frac{3}{4},$$

当 $m > 1$ 时, $y = \log_m x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\frac{3}{4} < m, \text{ 即: } m > 1,$$

综上所述, 结论是: m 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

已知函数 $y = mx^2 - mx - 1$.

(1) 若 $y < 0$ 时, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.

(2) 求关于 x 的不等式 $y < (-2m - 2)x - 3x^2$ 的解集.

答案

(1) $(-4, 0]$.

(2) 当 $m = -3$ 时, 解集为 $\{x \mid x > -1\}$;

当 $m > -3$ 时, 解集为 $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{m+3}\right\}$;

当 $m < -3$ 时, ① $m = -4$ 时, 解集为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -1\}$;

② $m < -4$, 集为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{m+3}\}$;

③ $-4 < x < -3$ 时, 解集为 $\{x \mid x > -1 \text{ 或 } x < \frac{1}{m+3}\}$.

解析

(1) $mx^2 - mx - 1 < 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立,

当 $m = 0$ 时, $-1 < 0$ 恒成立;

当 $m < 0$, $\Delta < 0$, 即 $m^2 + 4m < 0$, 解得 $-4 < m < 0$, 原不等式恒成立;

当 $m > 0$ 时, 原不等式不恒成立,

综上可得 m 的范围是 $(-4, 0]$.

(2) 关于 x 的不等式 $y < (-2m - 2)x - 3x^2$, 即为 $(m + 3)x^2 + (m + 2)x - 1 < 0$,

化为 $[(m + 3)x - 1](x + 1) < 0$,

当 $m = -3$ 时, 可得 $x + 1 > 0$, 解得 $x > -1$, 解集为 $\{x \mid x > -1\}$;

当 $m > -3$, 即 $\frac{1}{m+3} > 0$, 可得 $\left(x - \frac{1}{m+3}\right)(x + 1) < 0$, 则解集为 $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{m+3}\right\}$;

当 $m < -3$ 时, ① $m = -4$ 时, 可得 $(x + 1)^2 > 0$, 解集为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -1\}$;

② $m < -4$, 即 $-1 < \frac{1}{m+3}$, 可得 $\left(x - \frac{1}{m+3}\right)(x + 1) > 0$, 则解集为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{m+3}\}$;

③ $-4 < x < -3$ 时, 即 $-1 > \frac{1}{m+3}$, 可得 $\left(x - \frac{1}{m+3}\right)(x + 1) > 0$, 则解集为 $\{x \mid x > -1 \text{ 或 } x < \frac{1}{m+3}\}$.

12 2019~2020 学年天津南开区高一上学期期末第20题13分

已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), $f(-2) = f(0) = 0$, $f(x)$ 的最小值为 -1 .

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 设 $g(x) = f(-x) - \lambda f(x) + 1$.

① 若 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是减函数, 求实数 λ 的取值范围.

②

若 $g(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内恰有一个零点，求实数 λ 的取值范围。

答案

(1) $f(x) = x^2 + 2x$.

(2) ① $\lambda \geq 0$.

② $\lambda < 4$ 或 $\lambda > 0$.

解析

(1) 设 $f(x) = ax(x+2)$ ，又 $a > 0$ ， $f(-1) = -1$ ，

$\therefore a = 1$ ，

$\therefore f(x) = x^2 + 2x$.

(2) ① $\therefore g(x) = f(-x) - \lambda f(x) + 1$ ，

$\therefore g(x) = (1 - \lambda)x^2 - 2(1 + \lambda)x + 1$ ，

① 当 $\lambda = 1$ 时， $g(x) = -4x = 1$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数，满足要求；

② 当 $\lambda \neq 1$ 时，对称轴方程为： $x = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$ ，

i) 当 $\lambda < 1$ 时， $1 - \lambda > 0$ ，所以 $\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \geq 1$ ，解得 $0 \leq \lambda < 1$ ；

ii) 当 $\lambda > 1$ 时， $1 - \lambda < 0$ ，所以 $\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \leq -1$ ，解得 $\lambda > 1$.

综上， $\lambda \geq 0$.

② $g(x)$ 必过 $(0, 1)$ ，若恰有一个零点，只需满足 $g(-1) \cdot g(1) < 0$ ，

即 $(\lambda + 4) \cdot (-3\lambda) < 0$ ，

得： $\lambda < 4$ 或 $\lambda > 0$.