

02函数至基本初等函数难点攻克

1. 函数的性质

比较大小

1 2020~2021学年12月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第9题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 3^{|x+m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f\left(2^{\frac{1}{3}}\right)$, $b = f\left(\log_{\frac{1}{4}} 3\right)$, $c = f(2m+1)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

答案 D

解析

$\because f(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(x) = f(-x)$,

$\therefore 3^{|x+m|} - 1 = 3^{|-x+m|} - 1$,

$\therefore |x+m| = |-x+m|$,

$\therefore x^2 + m^2 + 2mx = x^2 + m^2 - 2mx$,

$\therefore m = 0$,

$\therefore f(x) = 3^{|x|} - 1$,

当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单增,

又 $\because f(x)$ 为偶函数,

$|2m+1| = 1$,

$0 < \left|\log_{\frac{1}{4}} 3\right| = \log_4 3 < \log_4 4 = 1$,

$\left|2^{\frac{1}{3}}\right| > 2^0 = 1$,

$\therefore a > c > b$.

故选D.

分段函数单调性及求解不等式

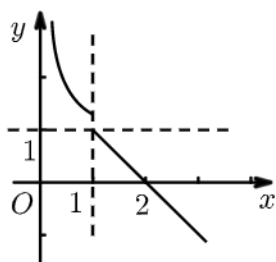
2 2019~2020学年天津滨海新区高一上学期期末第20题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x + m, & 0 < x < 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 在定义域内单调递减, 若 $|f(2m)| > f(a)$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

答案 $m > 3$

解析 因为函数 $f(x)$ 在定义域内单调递减, 则有 $0 < a < 1$, 且 $\log_a 1 + m \geq 1$, 则 $m \geq 1$;

作出函数 $f(x)$ 的图象如图:



因为 $|f(2m)| > f(a) = \log_a a + m = 1 + m$, 又因为 $m \geq 1$, 所以 $2m \geq 2$ 时,

且 $f(2m) = -2m + 2 \leq 0$, 则 $2m - 2 > 1 + m$, 解得 $m > 3$.

故答案为: $(3, +\infty)$.

根据单调性、奇偶性确定参数取值范围

3 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第14题

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数.

(1) 则实数 m 的值为 _____.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, a-2]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为 _____.

答案 (1) 2

(2) $1 < a \leq 3$

解析 (1) $x < 0$,

$$\therefore -x > 0,$$

$$f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) = -x^2 - 2x,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = x^2 + 2x,$$

$$\therefore m = 2.$$

故答案为: 2.

(2) 当 $x \leq 0$ 时,

对称轴 $x = -1$,

$\therefore x \in [-1, 0]$ 单增,

当 $x \geq 0$ 时,

对称轴 $x = 1$,

$\therefore x \in [0, 1]$ 单增,

$$\therefore -1 < a - 2 \leq 1,$$

$$\therefore 1 < a \leq 3.$$

故答案为: $1 < a \leq 3$.



根据单调性、奇偶性求解不等式

4

2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第5题

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且

$f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{2f(x) + f(-x)}{x} < 0$ 的解集是().

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

答案

B

解析

$\because$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

$\because f(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\because f(2) = 0,$$

$$\therefore f(-2) = f(2) = 0,$$

$$\therefore \frac{2f(x) + f(-x)}{x} = \frac{2f(x) + f(x)}{x} = \frac{3f(x)}{x},$$

$\therefore x > 0$ 时, 若 $\frac{2f(x) + f(-x)}{x} < 0$, 则 $f(x) < 0$, 即 $x \in (0, 2)$;

$x < 0$ 时, 若 $\frac{2f(x) + f(-x)}{x} < 0$, 则 $f(x) > 0$, 即 $x \in (-\infty, -2)$,

综上所述, $\frac{2f(x) + f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$,

故选 B.

5 2019~2020 学年天津高一上学期期中六校联考第 9 题 4 分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(|x - a^2| + |x - 2a^2| - 3a^2)$. 若

$\forall x \in \mathbf{R}, f(x - 2) \leq f(x)$, 则实数 a 的取值范围为 ().

- A. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$
- B. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$
- C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

答案 D

解析 由题意可得,

当 $x \geq 0$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} x - 3a^2, & (x > 2a^2) \\ -a^2, & (a^2 < x \leq 2a^2) \\ -x, & (0 \leq x \leq a^2) \end{cases},$$

由 $f(x) = x - 3a^2, x > 2a^2$, 得 $f(x) > -a^2$;

当 $a^2 < x \leq 2a^2$ 时, $f(x) = -a^2$;

由 $f(x) = -x, 0 \leq x \leq a^2$, 得 $f(x) \geq -a^2$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x)_{\min} = -a^2$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(x)_{\max} = a^2$,

$\therefore$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x - 2) \leq f(x)$,

$\therefore$ 应满足: $2a^2 - (-4a^2) \leq 2$,

解得: $a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

故选D.

2. 零点问题

6 2019~2020学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第4题5分

函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是()

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (3, 4)

D. (4, +∞)

答案 C

解析

∵ 连续减函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$,

∴ $f(3) = 2 - \log_2 3 > 0$, $f(4) = \frac{6}{4} - \log_2 4 < 0$,

∴ 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在的区间是(3, 4).

7 2019~2020学年11月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第1题5分

函数 $f(x) = \log_3 x + x^3 - 9$ 的零点所在区间是() .

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

答案 C

解析

因为函数 $y = \log_3 x$ 和 $y = x^3 - 9$ 均为增函数,

所以函数 $f(x) = \log_3 x + x^3 - 9$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$f(1) = \log_3 1 + 1^3 - 9 = -8 < 0$,

$f(2) = \log_3 2 + 2^3 - 9 = \log_3 \frac{2}{3} < 0$,

$f(3) = \log_3 3 + 3^3 - 9 = 19 > 0$,

所以函数 $f(x) = \log_3 x + x^3 - 9$ 的零点所在区间是(2, 3).

故选C.

8 2019~2020学年11月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第8题3分

已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \\ |\log_{2019} x|, & x > 0 \end{cases}$, 若存在三个不同实数 a, b, c 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 () .

A. $(0, 1]$

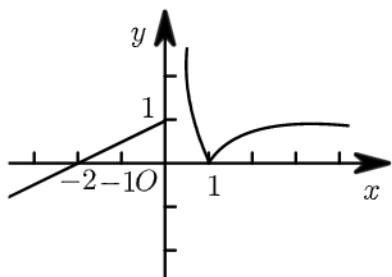
B. $[-2, 0)$

C. $(-2, 0]$

D. $(0, 1)$

答案 C

解析 由题意, 可画出 $f(x)$ 函数的图象大致如下:



$\therefore$ 存在三个不同实数 a, b, c , 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$,

可假设 $a < b < c$,

$\therefore$ 根据函数图象, 可知: $-2 < a \leq 0, 0 < b < 1, c > 1$,

又 $\because f(b) = f(c)$,

$\therefore |\log_{2019} b| = |\log_{2019} c|$,

即 $-\log_{2019} b = \log_{2019} c$,

$\therefore \log_{2019} b = \log_{2019} c$,

$\therefore \log_{2019} b + \log_{2019} c = 0$,

$\therefore \log_{2019} bc = 0$, 即 $bc = 1$,

$\therefore abc = a$,

$\therefore -2 < a \leq 0$,

$\therefore -2 < abc \leq 0$.

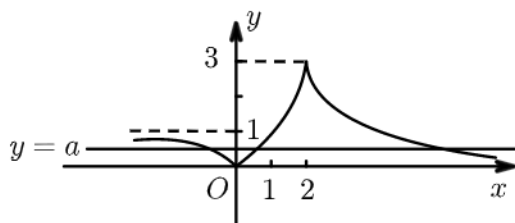
故选C .

9 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第18题4分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $(0, 1)$

解析



画出图象,

可知 $0 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

故答案为: $(0, 1)$.

3. 综合解答题



值域、最值问题

10 2019~2020 学年天津河东区高一上学期期中第19题10分

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$.

- (1) 若不等式 $f(x) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .
- (2) 若 $a > 1$, 且函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[1, a]$, 求实数 a 的值 .
- (3) 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, a+1]$ 的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式 .

答案

(1) $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

(2) $a = \sqrt{2}$.

(3) $g(a) = \begin{cases} 6 - 2a, & a > 2 \\ 6 - a^2, & a \leq 2 \end{cases}$.

解析

- (1) $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$, 开口向上,
不等式 $f(x) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

可得 $4a^2 - 20 < 0$,

解得 $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

(2) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ 的对称轴为 $x = a$,

则函数在 $[1, a]$ 上为减函数,

$\therefore$ 函数的值域为 $[1, a]$,

$\therefore f(a) = 1$,

即 $a^2 - 2a^2 + 5 = 1$,

即 $a^2 = 2$,

解得 $a = -\sqrt{2}$ (舍) 或 $a = \sqrt{2}$.

(3) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ 的对称轴为 $x = a$, 开口向上,

① 当 $a \leq 1 + \frac{a}{2}$ 即 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, a+1]$ 上的最大值为 $f(1+a) = 6 - a^2$;

② $a > 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, a+1]$ 上的最大值为 $f(1) = 6 - 2a$,

$\therefore g(a) = \begin{cases} 6 - 2a, & a > 2 \\ 6 - a^2, & a \leq 2 \end{cases}$.



恒成立问题

11

2019~2020学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第15题17分

设函数 $f(x) = \log_2(1 + a \cdot 2^x + 4^x)$, 其中 a 为常数.

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq x - 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

答案

$a \in [-2, +\infty)$.

解析

$\because x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq x - 1$ 恒成立.

$\therefore \log_2(1 + a \cdot 2^x + 4^x) - \log_2 2^{x-1} \geq 0$.

$\therefore \log_2 \left(\frac{4^x + a \cdot 2^x + 1}{2^{x-1}} \right) \geq 0$.

$\therefore \frac{4x + a \cdot 2^x + 1}{2^{x-1}} \geq 0$.

$\because 2^{x-1} > 0$.

$\therefore 4x + a \cdot 2^x + 1 - 2^{x-1} \geq 0$.

$\therefore a \geq \frac{1}{2} - (2^x + 2^{-x})$.

$\because x \geq 1$.

$$\therefore (2^x + 2^{-x})_{\min} = \frac{5}{2},$$

此时, $x = 1$.

$$\therefore a \geq \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

$$\therefore a \in [-2, +\infty).$$

12 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第20题11分

已知函数 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b$ ($a \neq 0, b < 1$) 在区间 $[2, 3]$ 上有最大值4, 最小值1, 设

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 不等式 $f(2^x) - k \cdot 2^x \geq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.

答案

(1) $a = 1, b = 0$.

(2) $k \leq 0$.

解析

(1) $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b$, 对称轴 $x = 1$ 在区间 $[2, 3]$ 上,

① $a > 0$, $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递增,

$$\therefore f(2) = b + 1 = 1, f(3) = 3a + b + 1 = 4,$$

$$\therefore b < 1,$$

$$\therefore b = 0, a = 1,$$

② $a < 0$, $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减,

$$\therefore f(2) = b + 1 = 4, \text{ 得 } b = 3,$$

$$\therefore b < 1,$$

$\therefore$ 不合题意, 舍去,

综上, $a = 1, b = 0$.

$$(2) \therefore f(x) = \frac{g(x)}{x},$$

$$\therefore f(x) = x + \frac{1}{x} - 2,$$

$\therefore f(2^x) - k \cdot 2^x \geq 0$ 在区间 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立,

$$\therefore 2^x + \frac{1}{2^x} - 2 - k \cdot 2^x \geq 0 \text{ 在区间 } [-1, 1] \text{ 上恒成立},$$

$$\text{即 } k \leq \left(\frac{1}{2^x}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1 = \left(\frac{1}{2^x} - 1\right)^2 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上恒成立},$$

$$\therefore x \in [-1, 1],$$

$$\therefore \frac{1}{2^x} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \text{ 即 } \left(\frac{1}{2^x} - 1\right)^2 \in [0, 1],$$

$$\therefore k \leq 0.$$

13 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第19题9分

已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + ax + 2a - 1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $\forall x \in (-2, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) $0 \leq a \leq 2$.

(2) $a \geq 4 - 2\sqrt{2}$.

解析

(1) $\because y = \ln x$ 在定义域内递增,

根据复合函数性质可知,

$x^2 + ax + 2a - 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 递减, 且恒为正.

$$\text{故有 } \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq -1 \\ 1 - a + 2a - 1 > 0 \end{cases}, \text{ 得 } 0 \leq a \leq 2.$$

(2) 由 $f(x) \geq 0$ 得,

$$\ln(x^2 + ax + 2a - 1) \geq \ln 1,$$

即 $x^2 + ax + 2a - 1 \geq 1$ 在 $(-2, +\infty)$ 恒成立,

$$\Rightarrow x^2 + a(x + 2) \geq 2,$$

$$\Rightarrow a(x + 2) \geq 2 - x^2, \because a > -2,$$

$$\Rightarrow a \geq \frac{2 - x^2}{x + 2},$$

$$\text{即 } a \geq \left(\frac{2 - x^2}{x + 2}\right)_{\max},$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{2 - x^2}{x + 2}, \text{ 令 } t = x + 2 (t > 0),$$

$$\text{得 } g(t) = \frac{2 - (t - 2)^2}{t}$$

$$= \frac{-t^2 + 4t - 2}{t}$$

$$= -\left(t + \frac{2}{t}\right) + 4$$

$$\leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

当 $t = \frac{2}{t}$, 即 $t = \sqrt{2}$ 时等号取得,

$$\therefore a \geq 4 - 2\sqrt{2}.$$

恒成立+零点问题

14 2019~2020学年11月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第19题14分

已知函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2$, 函数 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 和 $[2, +\infty)$ 上单调性相反, 求 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 若 $a < 0$, 不等式 $g(x) \leq 9$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.
- (3) 已知 $a \leq 1$, 若函数 $y = f(x) - \log_2 \frac{x}{8}$ 在 $[1, 2]$ 内有且只有一个零点, 试确定实数 a 的取值范围.

答案

- (1) $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
- (2) $-8 \leq a < 0$.
- (3) a 的取值范围为 $[-1, 1]$.

解析

- (1) 由单调性知, 函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2$ 为二次函数, 其对称轴为 $x = -\frac{-4}{2a} = 2$, 解得 $a = 1$,
 $\therefore$ 所求 $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
- (2) 依题意得 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)} \leq 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, 即 $\left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2 - 4x + 2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立,
 转化为 $ax^2 - 4x + 2 \geq -2$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立, $\Leftrightarrow ax^2 - 4x + 4 \geq 0$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立, 转化为 $a \geq \frac{4x - 4}{x^2} = \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立, 令 $\frac{1}{x} = t (t \geq 2)$, 则转化为 $a \geq 4t - 4t^2$ 在 $t \in [2, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \geq (4t - 4t^2)_{\max}$, $a \geq -8$ 所以 $-8 \leq a < 0$.
- (3) $\because y = f(x) - \log_2 \frac{x}{8} = ax^2 - 4x + 5 - \log_2 x$, 设 $r(x) = ax^2 - 4x + 5$, $s(x) = \log_2 x$,
 $x \in [1, 2]$, 则原命题等价于两个函数 $r(x)$ 与 $s(x)$ 的图象在区间 $[1, 2]$ 内有唯一交点,
 当 $a = 0$ 时, $r(x) = -4x + 5$ 在 $[1, 2]$ 内为减函数, $s(x) = \log_2 x$, $x \in [1, 2]$ 为增函数, 且
 $r(1) = 1 > s(1) = 0$, $r(2) = -3 < s(2) = 1$,
 $\therefore$ 函数在区间有唯一的交点, 当 $a < 0$ 时, $r(x)$ 图象开口向下, 对称轴为 $x = \frac{2}{a} < 0$,

$\therefore r(x)$ 在 $[1, 2]$ 内为减函数, $s(x) = \log_2 x$, $x \in [1, 2]$ 为增函数, 且

$$\begin{cases} r(1) \geq s(1) \\ r(2) \leq s(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1 \geq 0 \\ 4a-3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 1,$$

$$\therefore -1 \leq a < 0,$$

当 $0 < a \leq 1$ 时, $r(x)$ 在 $[1, 2]$ 内为减函数, $s(x) = \log_2 x$, $x \in [1, 2]$ 为增函数,

$$\text{则由 } \begin{cases} r(1) \geq s(1) \\ r(2) \leq s(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1 \geq 0 \\ 4a-3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 1,$$

$$\therefore 0 < a \leq 1,$$

综上, 所求 a 的取值范围为 $[-1, 1]$.