

01初高衔接之不等式一

1. 不等关系与不等式

1. 不等式的定义

用不等号($<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 、 $\neq$)表示不等关系的式子叫**不等式**

用“ $<$ ”或“ $>$ ”连接的等式叫**严格不等式**

用“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”连接的不等式叫**非严格不等式**.

2. 用不等式表示不等关系

常见的文字语言转化为数学语言的对应关系

文字语言	数学符号	文字语言	数学符号
大于		至多	
小于		至少	
大于 或 等于		不少于	
小于 或 等于		不多于	

教法备注

【答案】

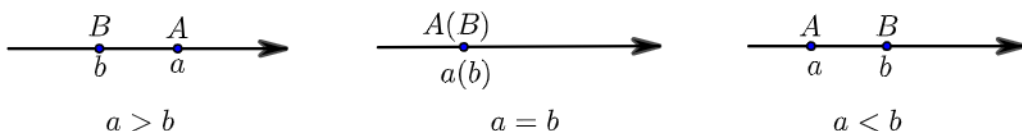
文字语言	数学符号	文字语言	数学符号
大于	$>$	至多	$\leq$
小于	$<$	至少	$\geq$
大于 或 等于	$\geq$	不少于	$\geq$
小于 或 等于	$\leq$	不多于	$\leq$

【教师备注】在常用的不等号中，要注意“ $\geq$ ”与“ $\leq$ ”的含义，例如， $a \leq b$ ，其含义是指“ $a < b$ **或** $a = b$ ”，与“ a 不大于 b ”相同—— $a < b$ ， $a = b$ 中**只要有一个成立**，就有 $a \leq b$ 。

2. 实数大小比较的依提

1. 利用数轴表示两实数大小

在数轴上，点A与点B分别表示实数a与b



2.关于实数大小的比较的事实

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

3.不等式的性质

1.不等式的基本性质

	别名	性质内容	注意
性质1	对称性	$a > b \Leftrightarrow b < a$ $a < b \Leftrightarrow b > a$	可逆
性质2	传递性	$a > b, b > c \Rightarrow a > c$ $c < b, b < a \Rightarrow c < a$	同向
性质3	可加性	$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$	可逆
性质3的推论	移项法则	$a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$	可逆
性质4	可乘性	$\left. \begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bc$	c的符号
		$\left. \begin{matrix} a > b \\ c < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac < bc$	
性质5	同向可加性	$\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$	同向
性质6	同向同正可乘性	$\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$	同向，同正
性质7	可乘方性	$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$	同正
性质8	可开方性	$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	

2.不等式的其他性质——倒数性质

$$\textcircled{1} a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$\textcircled{2} a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

教法备注

【补充】分数性质

若 $a > b > 0, m > 0$, 则

i. 真分数性质: $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}; \frac{b}{a} > \frac{b-m}{a-m} (b-m > 0).$

ii. 假分数性质: $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}; \frac{a}{b} < \frac{a-m}{a-m} (b-m > 0).$

4. 比较数(式)的大小的方法

	作差法	作商法
依据	$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$ $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b;$ $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$	$b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b,$ $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b,$ $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b;$ $b < 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a < b,$ $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b,$ $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a > b;$

【仅教师可见】注意题目中若含有解集两字, 按照解处理

5. 一元二次不等式



已因式分解

1

$$(x-7)(x+6) > 0.$$

教法备注

【题型】开口向上

答案

$$x > 7 \text{ 或 } x < -6.$$

2 解下列关于 x 的不等式：

$$(5-x)(x+1) \geq 0.$$

教法备注

【题型】开口向下

答案 $\{x | -1 \leq x \leq 5\}.$

解析 原不等式化为 $(x-5)(x+1) \leq 0$,

$$\therefore -1 \leq x \leq 5.$$

故所求不等式的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 5\}.$

 可因式分解

3 $x^2 - 2x - 8 < 0.$

教法备注

【题型】开口向上，可因式分解

答案 $-2 < x < 4.$

解析 不等式可化为 $(x+2)(x-4) < 0$ ， $\therefore$ 不等式的解是 $-2 < x < 4.$

4 $-x^2 + 2x + 8 < 0.$

教法备注

【题型】开口向下，可因式分解

答案 $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

解析 略

5 $(x+2)(x-3) > 6$.

教法备注

【题型】整理后可因式分解

答案 $x > 4$ 或 $x < -3$.

解析 原不等式可化为： $x^2 - x - 12 > 0$,

即 $(x+3)(x-4) > 0$,

于是： $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3 < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4$ 或 $x < -3$.

所以原不等式的解是 $x > 4$ 或 $x < -3$.

6 $(x-1)(x+2) \geq (x-2)(2x+1)$.

教法备注

【题型】整理后可因式分解

答案 $0 \leq x \leq 4$.

解析 原不等式可化为： $-x^2 + 4x \geq 0$,

即 $x^2 - 4x \leq 0 \Rightarrow x(x-4) \leq 0$,

于是： $\begin{cases} x \leq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$,

所以原不等式的解是 $0 \leq x \leq 4$.

完全平方

7 $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

教法备注

【题型】开口向上，完全平方

答案 $x = 2$.

解析 不等式可化为 $(x - 2)^2 \leq 0$, $\therefore$ 不等式的解是 $x = 2$.

8 $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$.

教法备注

【题型】开口向上，完全平方

答案 $\left\{ x \mid x = -\frac{2}{3} \right\}$

解析 略

9 解下列一元二次不等式：

$x^2 - 4x + 4 > 0$.

教法备注

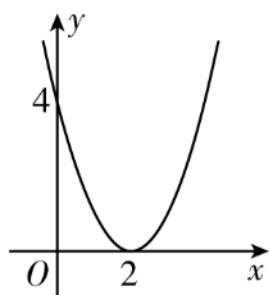
【题型】开口向上，完全平方

答案 $\{x \mid x \neq 2\}$.

解析 方法一：因为 $\Delta = 0$,

方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的解为 $x_1 = x_2 = 2$.

函数 $y = x^2 - 4x + 4$ 的简图如图 .



所以原不等式的解集是 $\{x|x \neq 2\}$.

方法二： $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ (当 $x = 2$ 时， $(x - 2)^2 = 0$)，

所以原不等式的解集是 $\{x|x \neq 2\}$.



不可因式分解

10 $x^2 - x + 2 < 0$.

教法备注

【题型】开口向上，解集为 $\emptyset$

答案 $\emptyset$.

解析 不等式可化为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} < 0$ ， $\therefore$ 不等式解集为 $\emptyset$.

11 $x^2 - 3x - 1 > 0$.

答案 $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$

解析 略

12 $2x^2 + 4x + 5 > 0$.

教法备注

【题型】开口向上，解集为R

答案 R

解析 略

6. 分式不等式

求解步骤及注意事项

- ①. 移项（保证不等号**右边为零**）
- ②. 通分
- ③. **化分式为整式**
- ④. **注意使分母为零的值是不能取的**

直接分式化整式

13 $\frac{1}{x} < 1$.

答案 $x < 0$ 或 $x > 1$.

解析 原不等式可化为：

$$\frac{1}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ 或 } x > 1 .$$

14 $\frac{1}{x+2} \leq 3$.

答案 $x < -2$ 或 $x \geq -\frac{5}{3}$.

解析 原不等式可化为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} - 3 &\leq 0 \Rightarrow \frac{-3x-5}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+5}{x+2} \geq 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} (3x+5)(x+2) \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x < -2 \text{ 或 } x \geq -\frac{5}{3} . \end{aligned}$$

15 如何解不等式 $\frac{x+1}{3x-2} > 0$.

答案 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > \frac{2}{3}\}$

需要移项通分

16 $\frac{1}{2x-1} \leq 1$.

答案 $x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 1$.

17 不等式 $\frac{3}{5-3x} > 1$ 的解集是 _____ .

答案 $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$

解析 由 $\frac{3}{5-3x} > 1$ 得, $\frac{3x-2}{5-3x} > 0$,
 则 $(3x-2)(5-3x) > 0$, 即 $(3x-2)(3x-5) < 0$,
 解得 $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$,
 所以不等式的解集是 $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$,
 故答案为: $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.

18 $\frac{2x+1}{x-3} < 1$.

答案 $-4 < x < 3$.

解析 $\frac{2x+1}{x-3} < 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x-3} < 0 \Rightarrow -4 < x < 3$.

19 $\frac{2x}{x-2} \leq 1$.

答案 $[-2, 2)$.

解析 $\frac{2x}{x-2} - 1 \leq 0$.
 $\therefore \frac{2x - (x-2)}{x-2} \leq 0$.
 $\therefore \frac{x+2}{x-2} \leq 0$.
 $(x+2)(x-2) \leq 0$ 且 $x-2 \neq 0$.
 $\therefore -2 \leq x < 2$.

20 解不等式 $\frac{2x-1}{x+3} \geq 1$.

答案 $\{x|x < -3 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

解析 $\frac{2x-1}{x+3} \geq 1$,
 $\frac{2x-1}{x+3} - 1 \geq 0$,
 $\frac{x-4}{x+3} \geq 0$,
 $(x+3)(x-4) \geq 0$ 且 $x+3 \neq 0$,
 解得 $x < -3$ 或 $x \geq 4$,
 $\therefore$ 原不等式解集为 $\{x|x < -3 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

21 $\frac{x-4}{3-x} \geq 1$.

答案 $\left\{x|3 < x \leq \frac{7}{2}\right\}$.

解析 移项得 $\frac{x-4}{3-x} - 1 \geq 0$, 通分并整理得 $\frac{2x-7}{3-x} \geq 0$,
 $\frac{2x-7}{3-x} \geq 0$ 等价于 $\begin{cases} (2x-7)(3-x) \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$,
 即 $\begin{cases} (2x-7)(x-3) \leq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$, 解得 $3 < x \leq \frac{7}{2}$,
 $\therefore$ 原不等式的解集是 $\left\{x|3 < x \leq \frac{7}{2}\right\}$.

22 $\frac{-3x+4}{x-1} \geqslant 2$.

答案 $1 < x \leqslant \frac{6}{5}$.