

02函数的值域与最值

【仅教师可见】

求解值域的常用的方法有：**观察法、换元法、配方法、判别式法、数形结合法、分离常数法、反表示法、中间变量值域法**等。

由于上述方法有些不常用且难度较大，不适合作为暑期讲授范围，故不会出现在我们的暑期讲义中；如果程度较好的学生，可适当自行扩展。

上述的全部办法会在秋季讲义中完整呈现。

1. 函数的值域

1. 函数值域的定义

函数的**值域**是在对应关系 f 作用下，自变量 x 在定义域内取值时相应的**函数值组成的集合**。

2. 对函数的值域的理解

- ①函数的值域与最值均是在定义域上研究的，**闭区间上的连续函数必有最大值和最小值**；
- ②函数值域的几何意义是函数图象上点的纵坐标的变化范围。

3. 确定函数值域的原则

- ①当函数 $y=f(x)$ 用**表格**给出时，函数的值域是指**表格中实数 y 的集合**；
- ②当函数 $y=f(x)$ 用**图象**给出时，函数的值域是指**图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合**；
- ③当函数 $y=f(x)$ 用**解析式**给出时，函数的值域**由函数定义域及对应关系唯一确定**；
- ④当函数 $y=f(x)$ **由实际问题给出**时，函数的值域**受问题的实际意义限制**

4. 常见函数的值域

函数	函数值域
一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$	①
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$	②
反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x \neq 0, k \neq 0)$	③

【答案】①R ②当 $a > 0$ 时，值域为 $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$ ；当 $a < 0$ 时，值域为 $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$

③ $\{y|y \in R \text{ 且 } y \neq 0\}$



二次函数的值域

1

求下列函数的值域：

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, x \in [-3, 2].$$

答案

$[0, 30]$.

解析

$$\because f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 且 } x \in [-3, 2],$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $f(x)$ 有最小值0；

当 $x = -3$ 时， $f(x)$ 有最大值30.

$\therefore$ 函数的值域是 $[0, 30]$.

2

2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第2题5分

函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的值域为（ ）.

A. $(-4, \infty)$

B. $[-4, +\infty)$

C. $(-3, +\infty)$

D. $[-3, +\infty)$

答案

B

解析

$\because$ 函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象开口向上，对称轴为 $x = 1$ ，

$$\therefore y_{\min} = (-1)^2 - 2 - 3 = -4,$$

$\therefore$ 值域为 $[-4, +\infty)$.

故选B.

包罗万象 举一千从

3

2017~2018学年10月天津宝坻区宝坻区第一中学高三上学期月考文科第1题

已知集合 $A = \{y | y = x^2 + 2x\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2x\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{y | y \geq -1\}$

B. $\emptyset$

C. $\{(0, 0)\}$

D. $\{0\}$

答案 A

解析 由题意得, $A = B = [-1, +\infty)$, $\therefore A \cap B = \{y | y \geq -1\}$, 故选A.

2. 函数值域的求法

观察法

1. 观察法

有的函数的结构并不复杂, 可以通过对解析式的简单变形和观察, 利用熟知的函数的值域求出函数的值域

举例: 函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的值域是_____.

教法备注

【答案】 $\{y | 0 < y \leq 1\}$

4 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第12题4分

函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 的定义域为 $[2, 5)$, 则其值域为_____.

答案 $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$

解析 $\because 2 \leq x < 5,$

$$\therefore 1 \leq x - 1 < 4,$$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{x-1} \leq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{2}{x-1} \leq 2,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } \left(\frac{1}{2}, 2\right].$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{1}{2}, 2\right].$$

5 求下列函数的值域：

$$y = \sqrt{x} - 1.$$

答案 $[-1, +\infty)$.

解析 $\because \sqrt{x} \geq 0,$

$$\therefore \sqrt{x} - 1 \geq -1,$$

$\therefore y = \sqrt{x} - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$.

包罗万象 举一千从

6 2017~2018学年天津河东区高一上学期期中第19题8分

已知函数 $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$.

若函数 $f(x)$ 的定义域为集合 A , 值域为集合 B , 求 $A \cap B$.

答案 $[2, 3]$.

解析 由 $3-x \geq 0$, 得 $x \leq 3$, $\therefore A = (-\infty, 3]$.

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$ 在 $(-\infty, 3]$ 上为减函数,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(3) = 2,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$.

$$\text{即 } B = [2, +\infty).$$

$$\therefore A \cap B = (-\infty, 3] \cap [2, +\infty) = [2, 3].$$

 换元法

2.换元法

运用换元, 将已知函数转化为值域容易确定的另一函数, 从而求得原函数的值域

举例: 形如 $y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$ (a, b, c, d 均为常数, $ac \neq 0$) 的函数常用此法.

7 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第18题11分

计算：

求函数 $y = 2x + \sqrt{x-1}$ 的值域 .

答案 $[2, +\infty)$.

解析 定义域 $[1, +\infty)$,

令 $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0)$, 则 $x = t^2 + 1$.

$$\therefore y = 2(t^2 + 1) + t$$

$$= 2t^2 + t + 2$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} .$$

$\therefore y = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ 的图象的对称轴方程为 $t = -\frac{1}{4}$. 开口向上 .

$\therefore y = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增 .

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时 , y 取最小值 2 .

$\therefore y = 2x + \sqrt{x-1}$ 值域为 $[2, +\infty)$.

8 求下列函数的值域：

$$y = x + \sqrt{2x-1} .$$

答案 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

解析 设 $u = \sqrt{2x-1} \left(x \geq \frac{1}{2}\right)$,

则 $x = \frac{1+u^2}{2} (u \geq 0)$, (换元法)

$$\therefore y = \frac{1+u^2}{2} + u = \frac{(u+1)^2}{2} (u \geq 0) .$$

由 $u \geq 0$ 知 $(u+1)^2 \geq 1$,

$$\therefore y \geq \frac{1}{2} .$$

$\therefore$ 函数 $y = x + \sqrt{2x-1}$ 值域为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

9 求函数 $y = 2x - 5 + \sqrt{15 - 4x}$ 的值域 .

答案 $(-\infty, 3]$.

解析 设 $t = \sqrt{15 - 4x}$

$$x = \frac{-t^2 + 15}{4} ,$$

$$\text{得 } y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{5}{2} ,$$

$$y = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 3 , t = 1 \text{ (符合 } t \geq 0 \text{)} , y \text{ 最大值为 } 3 .$$



配方法

3. 配方法

若函数是二次函数形式, 即可化为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 型的函数, 则可通过配方后再结合二次函数的性质求值域, 但要注意给定区间上二次函数最值的求法 .

举例 : 求函数 $y = x - 2\sqrt{x} + 3$ 的值域

教法备注

【答案】因为 $y = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2 \geq 2$, 故所求函数的值域为 $[2, +\infty)$.



数形结合法

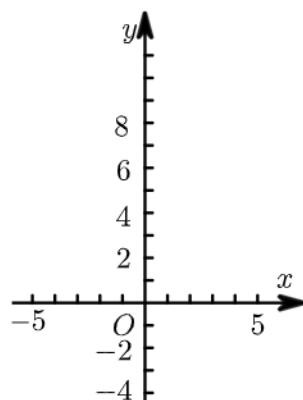
4. 数形结合法

有些函数的图像比较容易画出, 可以通过函数的图像得出函数的值域

10 2018~2019学年10月天津河北区天津市第二中学高一上学期月考第17题5分

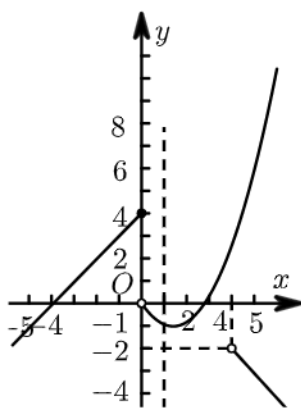
$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} x + 4, & (x \leq 0) \\ x^2 - 2x, & (0 < x \leq 4) \\ -x + 2, & (x > 4) \end{cases} .$$

画出函数 $f(x)$ 的图象, 并根据图象写出 $f(x)$ 的值域 .



答案 $(-\infty, 8]$.

解析



$\therefore$ 值域为 $(-\infty, 8]$.



分离常数法

5. 分离常数法

形如 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0$) 的函数, 经常采用分离常数法,

将 $\frac{cx + d}{ax + b}$ 变形为 _____ ①

再结合 x 的取值范围确定 $\frac{d - \frac{bc}{a}}{ax + b}$ 的取值范围, 从而确定函数的值域为

_____ ② .

举例: (1) 求函数 $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ 值域

(2) 求函数 $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ ($1 \leq x \leq 2$) 的值域

教法备注

【答案】 ① $\frac{\frac{c}{a}(ax + b) + d - \frac{bc}{a}}{ax + b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax + b}$, ; ② $\{y \mid y \in \mathbb{R}, \text{ 且 } y \neq \frac{c}{a}\}$

【举例答案】 (1) $y = 2 - \frac{3}{x + 1}$ 且 $\frac{3}{x + 1} \neq 0$, $\therefore y \neq 2$, $\therefore$ 函数的值域为 $\{y \mid y \in \mathbb{R}, \text{ 且 } y \neq 2\}$

(2) $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, 又 $1 \leq x \leq 2$, 所以 $2 \leq x+1 \leq 3$, 所以 $1 \leq \frac{3}{x+1} \leq \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, 故所求函数的值域为 $[\frac{1}{2}, 1]$.

11 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第18题11分

计算：

求函数 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域.

答案 $(-1, 3)$.

解析 $y = \frac{3x-1}{x+1} = 3 - \frac{4}{x+1}$.

由反比例函数性质得 y 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore y > 3 - \frac{4}{0+1} = -1, \text{ 且 } y < 3.$$

$\therefore$ 值域为 $(-1, 3)$.

12 求下列函数的值域：

$$y = \frac{5x-1}{4x+2}.$$

答案 $\left\{ y \mid y \in \mathbf{R}, \text{ 且 } y \neq \frac{5}{4} \right\}$.

解析 $y = \frac{5x-1}{4x+2}$

$$= \frac{\frac{5}{4}(4x+2) - 1 - \frac{5}{2}}{4x+2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}(4x+2) - \frac{7}{2}}{4x+2}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{7}{2(4x+2)}.$$

$$\therefore \frac{7}{2(4x+2)} \neq 0,$$

$$\therefore y \neq \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{函数的值域为 } \left\{ y \mid y \in \mathbf{R}, \text{ 且 } y \neq \frac{5}{4} \right\}.$$

13 2018~2019学年10月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第10题5分

函数 $y = \frac{4+5x^2}{1+x^2}$ 的值域为 _____ .

答案 [4, 5)

解析 $\because y = \frac{4+5x^2}{1+x^2} = \frac{5x^2+5-1}{x^2+1}$
 $= 5 - \frac{1}{x^2+1}$,
 设 $t = x^2 + 1$, $t \geq 1$,
 $\therefore y = 5 - \frac{1}{t}$, $t \geq 1$,
 $\therefore -\frac{1}{t} \in (0, 1]$,
 $\therefore 5 - \frac{1}{t} \in [4, 5)$,
 $\therefore y \in [4, 5)$.

3. 其他函数的值域



分段函数

1. 分段函数的值域是各段值域的并集

14 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第8题3分

若定义运算 $a \Theta b = \begin{cases} b, & a \geq b \\ a, & a < b \end{cases}$, 则函数 $f(x) = x \Theta (2-x)$ 的值域为 () .

- A. (0, 1] B. $(-\infty, 1]$ C. (0, 1) D. $[1, +\infty)$

答案 B

解析 $f(x) = x \Theta (2-x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$,
 当 $x \geq 1$ 时 , $f(x) = 2-x \in (-\infty, 1]$,
 当 $x < 1$ 时 , $f(x) = x \in (-\infty, 1)$,
 综上 , 函数 $f(x) = x \Theta (2-x)$ 的值域是 $(-\infty, 1]$.
 故选B .

15 2018~2019学年9月天津河东区天津市第四十五中学高一上学期月考第5题

函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 6x, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 的值域是 () .

- A. $\mathbf{R}$ B. $[-8, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[-9, 1]$

答案 B

解析 当 $0 \leq x \leq 3$, $y = 2x - x^2$ 的值域为 $[-3, 1]$;

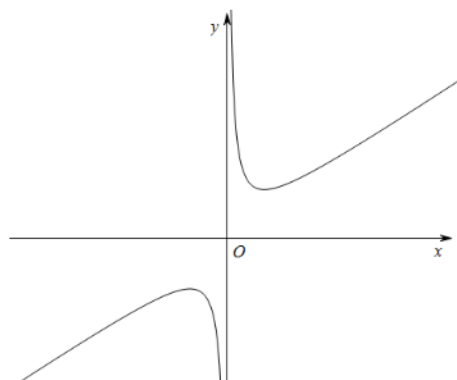
当 $-2 \leq x < 0$, $y = x^2 + 6x$ 的值域为 $[-8, 0]$,

$\therefore f(x) \in [-8, 1]$.

故选B .

对勾函数

2. 形如 $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ (对勾函数) 模型



定义域: $\{x | x \neq 0\}$

图像的变化趋势: 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$, $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上单调递增; 在 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 上单调递减

值域: _____

教法备注

【答案】值域: $(-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$

16 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$, $x > 0$, 则 $f(x)$ 的值域为 _____ .

答案 $[4, +\infty)$

17 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期单元测试《基本不等式(1)》第8题

当 $x > 1$ 时, 函数 $f(x) = 2 - x - \frac{1}{x-1}$ 的最大值为 _____ .

答案 -1

解析 $\because x > 1$,

$$\therefore x - 1 > 0,$$

$$x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geqslant 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} + 1 = 3,$$

$$\therefore -x - \frac{1}{x-1} \leqslant -3,$$

$$f(x) = 2 - x - \frac{1}{x-1} \leqslant 2 - 3 = -1,$$

当且仅当 $x - 1 = \frac{1}{x-1}$ 即 $x = 2$ 时“=”取得.

4. 二次函数的含参最值问题

18 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$, $x \in [-1, 2]$, 求 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$.

答案 $g(a) = \begin{cases} 2 + 2a, & a < -1 \\ 1 - a^2, & -1 \leqslant a \leqslant 2, \\ 5 - 4a, & a > 2. \end{cases}$

解析 $f(x) = x^2 - 2ax + 1 = (x - a)^2 + 1 - a^2$,

当 $-1 \leqslant a \leqslant 2$ 时, $g(a) = f(a) = a^2 - 2a^2 + 1 = 1 - a^2$;

当 $a < -1$ 时, $g(a) = f(-1) = 2 + 2a$;

当 $a > 2$ 时, $g(a) = f(2) = 5 - 4a$.

所以 $g(a) = \begin{cases} 2 + 2a, & a < -1 \\ 1 - a^2, & -1 \leqslant a \leqslant 2, \\ 5 - 4a, & a > 2. \end{cases}$

19 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第8题4分

D. $\frac{5}{4}$ 或1或-1

故选A.

$$g(a) = f(-1) = 2 + 2a + 3 = 2a + 5 ;$$

$$\textcircled{2} -1 < \frac{a}{2} < 1 \text{ 即 } -2 < a < 2 \text{ 时,}$$

$$g(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) = 3 - \frac{a^2}{2};$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{2} \geq 1 \text{ 即 } a \geq 2 \text{ 时,}$$

$$g(a) = f(1) = 5 - 2a,$$

$$\therefore g(a) = \begin{cases} 2a + 5, & a \leq -2 \\ 3 - \frac{a^2}{2}, & -2 < a < 2 \\ 5 - 2a, & a \geq 2 \end{cases}.$$

$$(2) \textcircled{1} a \leq -2 \text{ 时, } g(a)_{\max} = g(-2) = 1;$$

$$\textcircled{2} -2 < a < 2 \text{ 时, } g(a)_{\max} = g(0) = 3;$$

$$\textcircled{3} a \geq 2 \text{ 时, } g(a)_{\max} = g(2) = 1,$$

$$\therefore g(a)_{\max} = 3.$$

21 2018~2019学年10月天津河北区天津市第二中学高一上学期月考第18题5分

已知 $f(x) = -x^2 + 2(a-1)x + 2$, $x \in [1, 5]$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值.

(2) 若 $f(x)$ 最小值为 $f(5)$, 求 a 的取值范围.

答案

$$(1) a \leq 2 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 2a - 1,$$

$$2 < a \leq 6 \text{ 时, } f(x)_{\max} = a^2 - 2a + 2,$$

$$a > 6 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 10a - 33.$$

$$(2) a \in (-\infty, 2] \cup [4, 5].$$

解析

$$(1) f(x) = -x^2 + 2(a-1)x + 2, x \in [1, 5].$$

对称轴 $x = a - 1$,

$$\textcircled{1} a - 1 \leq 1 \text{ 时, 即 } a \leq 2 \text{ 时,}$$

$f(x)$ 在 $[1, 5]$ 上单调递减,

$$f(x)_{\max} = f(1) = 2a - 1,$$

$$\textcircled{2} 1 < a - 1 \leq 5, \text{ 即 } 2 < a \leq 6 \text{ 时,}$$

$f(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递增,

在 $(a, 5)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(a) = a^2 - 2a + 2 ,$$

③ $a - 1 > 5$, 即 $a > 6$ 时 ,

$f(x)$ 在 $[1, 5]$ 上单调递增 ,

$$f(x)_{\max} = f(5) = 10a - 33 ,$$

综上 : $a \leq 2$ 时 , $f(x)_{\max} = 2a - 1$,

$2 < a \leq 6$ 时 , $f(x)_{\max} = a^2 - 2a + 2$,

$a > 6$ 时 , $f(x)_{\max} = 10a - 33$.

(2) 由 (1) 得 : $a \leq 2$ 则满足条件 ,

$2 < a \leq 6$ 时 , 若 $f(x)_{\min} = f(5)$,

则 $3 < a - 1 \leq 5$, 解得 $4 < a \leq 5$,

$a > 6$ 时 , 不满足条件 ,

综上 , $a \in (-\infty, 2] \cup [4, 5]$.