

03函数的性质综合练习题

1. 解不等式

1 2020~2021学年天津滨海新区大港第一中学高一上学期期中（七校联考）第6题4分

若函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，又 $f(2) = 0$ ，则 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为（ ）。

A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

答案 A

解析 若函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数。

又 $f(2) = 0$ ， $\therefore f(-2) = 0$ 。

$\therefore$ 不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 可化为 $2xf(x) < 0$ ，

则 $\begin{cases} x > 0, \\ f(x) < f(2) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ f(x) > f(-2) \end{cases}$ ，

解得 $0 < x < 2$ 或 $-2 < x < 0$ 。

故选A。

2 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第12题4分

定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数 $f(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 为减函数，则满足不等式 $f(1+m) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的 m 的取值范围是_____。

答案 $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ 或 $-2 \leq m < -\frac{3}{2}$

解析 $\because$ 当 $x \geq 0$ 时， $f(x)$ 为减函数，

又 $\because f(x)$ 为偶函数，

∵横坐标越靠近0，函数值越大，

$$\therefore f(1+m) < f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore |1+m| > \frac{1}{2},$$

$$\therefore m > -\frac{1}{2} \text{ 或 } m < -\frac{3}{2},$$

$$\text{又} \because -1 \leq 1+m \leq 1,$$

$$\therefore -2 \leq m \leq 0,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < m \leq 0 \text{ 或 } -2 \leq m < -\frac{3}{2}.$$

3 2019~2020学年天津高一上学期期末（武清、蓟县、静海、宁河、宝坻）第7题4分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且有区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，若 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ，则不等式

$f(2x-1) < 0$ 的解集为（ ）.

A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

B. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

$\cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

答案 A

解析 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

故在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

$$\text{又} f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\text{故} f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore \text{当} x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 时},$$

$$f(x) < 0,$$

$$\text{故不等式} f(2x-1) < 0,$$

$$\text{可得: } -\frac{1}{2} < 2x-1 < \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4},$$

故选A.

4 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第12题

定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ ，当 $x \in [-2, 0]$ 时 $f(x)$ 单调递增，设 $f(1-m) < f(m)$ ，则 m 的取值范围为 _____ .

答案 $-1 \leq m < \frac{1}{2}$

解析 $\because f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为偶函数，

又 $\because x \in [-2, 0]$ 时 $f(x)$ 单调递增，

$$f(1-m) < f(m),$$

$$\therefore \begin{cases} |1-m| > |m| \\ -2 \leq 1-m \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases}.$$

$$\therefore m^2 < m^2 - 2m + 1,$$

$$\therefore m < \frac{1}{2}.$$

$$-2 \leq 1-m \leq 2,$$

$$-3 \leq -m \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 3.$$

$$\text{综上 } -1 \leq m < \frac{1}{2}.$$

2. 比较大小

5 2020~2021学年天津河东区高一上学期期中第6题4分

设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 是减函数，则 $f(-2)$ ， $f(\pi)$ ， $f(-3)$ 的大小关系是 () .

A. $f(\pi) > f(-3) > f(-2)$

B. $f(\pi) > f(-2) > f(-3)$

C. $f(\pi) < f(-3) < f(-2)$

D. $f(\pi) < f(-2) < f(-3)$

答案 C

解析 $\because f(x)$ 为偶函数，

又 $\because$ 当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 为减函数，

$\therefore$ 横坐标越靠近0, 函数值越大,

$\therefore |-2| < |-3| < |\pi|$,

$\therefore f(-2) > f(-3) > f(\pi)$.

故选C.

6 2018~2019学年天津蓟县高一上学期期中第13题4分

设 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(1)$, $f(-2)$, $f(-3)$ 的大小关系是 _____.

答案 $f(1) < f(-2) < f(-3)$

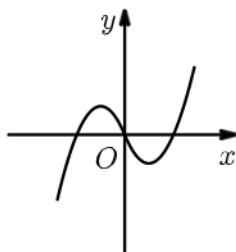
解析 根据题意, 若 $f(x)$ 为偶函数,
则 $f(-2) = f(2)$, $f(-3) = f(3)$,
又由函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,
则 $f(1) < f(2) < f(3)$,
则有 $f(1) < f(-2) < f(-3)$.
故答案为: $f(1) < f(-2) < f(-3)$.

3. 图像判断

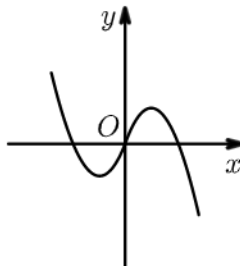
7 2018~2019学年12月天津南开区天津中学高一上学期月考第7题3分

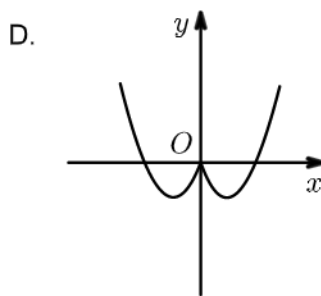
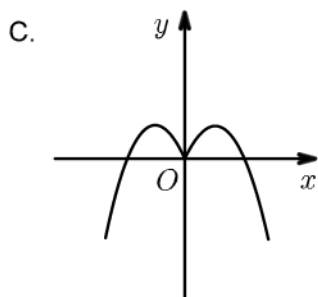
函数 $y = x(x^2 - 1)$ 的大致图象是 () .

A.



B.





答案 A

解析 $f(-x) = -x(x^2 - 1) = -f(x)$ 为奇函数，排除C，D，
当 x 充分大时，比如 $x = 2$ 时， $y = 6 > 0$ 。
故选A。

4. 综合性问题

定义证明

8 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第17题8分

已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

- (1) 当 $a \in \mathbf{R}$ 时，用定义证明 $f(x)$ 为奇函数 .
- (2) 当 $a < 0$ 时，用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 .

答案 (1) 证明见解析 .
(2) 证明见解析 .

解析 (1) 定义域 $\{x|x \neq 0\}$ 关于原点对称，
$$f(-x) = -x + \frac{a}{-x} = -\left(x + \frac{a}{x}\right),$$
$$= -f(x),$$
$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数 .}$$

(2) $a < 0$ 时，设 $0 < x_1 < x_2$ ，
则 $f(x_1) - f(x_2)$ ，

$$\begin{aligned}
 &= \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right), \\
 &= (x_1 - x_2) + \left(\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}\right), \\
 &= (x_1 - x_2) + \frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}, \\
 &= (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{a}{x_1 x_2}\right), \\
 &x_1 - x_2 < 0, \quad 1 - \frac{a}{x_1 x_2} > 0, \\
 &\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \\
 &\text{即 } f(x_1) < f(x_2), \\
 &\text{故 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增}.
 \end{aligned}$$



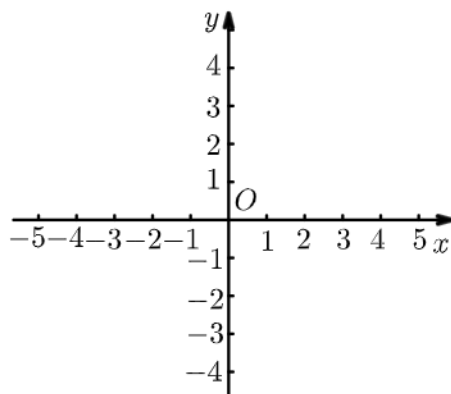
画图并判断单调性

9

2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期末第19题11分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式，并画出函数 $f(x)$ 的图像。



(2) 根据函数图像写出 $f(x)$ 的单调区间和值域。

答案

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$. 画图见解析.

(2) 单调增区间为 $[-1, 0]$, $[1, +\infty)$,

单调减区间为 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$,

函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$.

解析

(1) 由 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$,

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$,

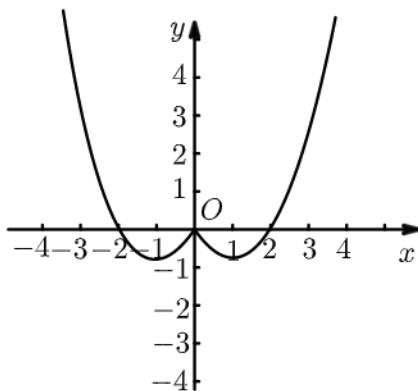
$$\therefore f(-x) = x^2 + 2x,$$

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x,$$

$$\text{故函数的解析式为: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}.$$

函数图像如下图所示:



(2) 由函数图像可知:

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, 0]$, $[1, +\infty)$,

单调减区间为 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$,

函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$.

解不等式

10 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第24题

已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 判断当 $x \in (-1, 1)$ 时函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明.
- (3) 解不等式 $f(t^2 - 1) + f(t) < 0$.

答案

$$(1) f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

$$(2) f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上单调递增, 证明见解析.}$$

$$(3) \left(-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

解析

$$(1) \because \text{函数 } f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} \text{ 是定义在 } (-1, 1) \text{ 上的奇函数,}$$

$$\therefore f(0) = b = 0.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore a = 2.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

(2) 任取 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{2(1 - x_1x_2)(x_1 - x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)},$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, 1 - x_1x_2 > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上单调递增}.$$

(3) $f(t^2 - 1) + f(t) < 0$,

$\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

$$\therefore f(t^2 - 1) < -f(t) = f(-t),$$

由 (2) 得 $f(x)$ 为 $(-1, 1)$ 上的增函数,

$$\therefore \begin{cases} -1 < t < 1 \\ -1 < t^2 - 1 < 1 \\ t^2 - 1 < -t \end{cases},$$

$$\text{解得: } -1 < t < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \text{不等式的解集为: } \left(-1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

11

2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第18题12分

已知定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性.

(3) 解关于 t 的不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

答案

(1) $a = 0$.

(2) $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上单调递增; 证明见解析.

(3) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

解析

(1) 由题设可知：

函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数，且定义域为 $(-1, 1)$ ，

故 $f(0) = 0$ ，即代入 $f(x)$ 中，解得 $a = 0$ 。

(2) 由 (1) 知： $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ，

则设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$ ，

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} \\ &= \frac{x_1x_2^2 + x_1 - (x_2x_1^2 + x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \\ &= \frac{(1-x_1x_2) \cdot (x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}, \end{aligned}$$

又由 $-1 < x_1 < x_2 < 1$ ，则 $x_1x_2 < 1$ ，

则 $1 - x_1x_2 > 0$ ， $x_1 - x_2 < 0$ ，

$$\text{故 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{(1-x_1x_2)(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$ ，

故 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上单调递增。

(3) 由 (1) (2) 知：

$f(x)$ 为奇函数且在定义域 $(-1, 1)$ 上单增，

则 $f(t-1) + f(t) < 0$ ，

即 $f(t-1) < -f(t) = f(-t)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} -1 < t-1 < 1 \\ -1 < -t < 1 \\ t-1 < -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t < 2 \\ -1 < t < 1 \\ t < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2},$$

故不等式的解集为 $(0, \frac{1}{2})$ 。

12

2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测D卷第15题

已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 。

(1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性。

(2) 判断当 $x \in (-1, 1)$ 时函数 $f(x)$ 的单调性，并用定义证明。

(3) 若 $f(x)$ 定义域为 $(-1, 1)$ ，解不等式 $f(2x-1) + f(x) < 0$ 。

答案

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 为奇函数，证明见解析。

- (2) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数, 证明见解析.
- (3) $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{3}\right\}$.

解析

- (1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 为奇函数, 关于原点对称,

$$\because f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ 定义域为 } \mathbf{R},$$

$$\text{又 } f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x),$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ 为奇函数.}$$

- (2) 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-1, 1)$ 为增函数,

任取 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$= \frac{x_1 x_2^2 + x_1 - x_2 x_1^2 - x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 < 0,$$

$$\therefore \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2).$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上为增函数.}$$

- (3) 由 (1)、(2) 可得 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数, 且为奇函数,

$$\therefore f(2x-1) + f(x) < 0,$$

$$\therefore f(x) < -f(2x-1) = f(1-2x),$$

$$\therefore \begin{cases} x < 1-2x \\ -1 < x < 1 \\ -1 < 2x-1 < 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 0 < x < \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{原不等式的解集为 } \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{3}\right\}.$$

最值

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} (x \neq 0)$.

- (1) 证明函数 $f(x)$ 为奇函数 .
- (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性 , 并说明理由 .
- (3) 若 $x \in [-3, -2]$, 求函数的最大值和最小值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 .
- (3) $f(x)_{\min} = f(-3) = -\frac{10}{3}$, $f(x)_{\max} = f(-2) = -\frac{5}{2}$.

解析

- (1) $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$.
故 $f(x)$ 为奇函数 .
- (2) 在 $[1, +\infty)$ 上任取 $x_1 < x_2$,
则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + 1}{x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}$,
因为 $1 < x_1 < x_2 < +\infty$, 所以 $x_1 x_2 > 1$, $x_1 - x_2 < 0$,
故 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2} < 0$,
所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增 .
- (3) 由 (1) (2) 得 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上单调递减 .
所以 $f(x)_{\min} = f(-3) = -\frac{10}{3}$, $f(x)_{\max} = f(-2) = -\frac{5}{2}$.

14

2019~2020 学年天津高一上学期期中六校联考第 16 题 12 分

已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 4$.

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数 , 求 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的值域 .
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上时减函数 , 求 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上的最大值与最小值 .

答案

- (1) $[4, 13]$.
- (2) 最大值为 $7 - 2a$, 最小值为 $-a^2 + 2a + 3$.

解析

- (1) 根据题意 , 函数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 4$ 为二次函数 ,
其对称轴为 $x = a - 1$,

若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $a-1=0$, 即 $a=1$,

则 $f(x)=x^2+4$,

在 $[-1, 2]$ 上,

$f(-1)=(-1)^2+4=5$, $f(3)=3^2+4=13$, $f(0)=0^2+4=4$,

故 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的值域为 $[4, 13]$.

(2) 根据题意, 函数 $f(x)=x^2-2(a-1)x+4$, 为二次函数,

其对称轴为 $x=a-1$,

若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 则 $a-1 \geq 2$, 即 $a \geq 3$,

又由 $1 < a-1 < a$, 则 $f(x)$ 在区间 $[1, a-1]$ 上递减, 在 $[a-1, a]$ 上递增,

且 $f(1)=7-2a$, $f(a-1)=-a^2+2a+3$,

$f(a)=-a^2+2a+4$,

$\therefore f(1)-f(a)=(7-2a)-(-a^2+2a+4)$

$=a^2-4a+3$

$=(a-2)^2-1$

又由 $a \geq 3$, 则 $f(1) \geq f(a)$,

则 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上的最大值为 $f(1)=7-2a$,

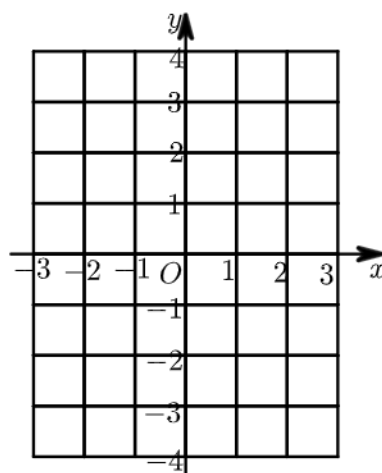
最小值为 $f(a-1)=-a^2+2a+3$.

5. 零点问题

15 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第18题

已知函数 $f(x)=x|x-1|$.

(1) 在给定的直角坐标系内画出 $f(x)$ 的图象, 并写出函数的单调区间.



(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 公共点的个数 .

答案

(1) 画图见解析 .

函数的单调递增区间是 $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$,

单调递减区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

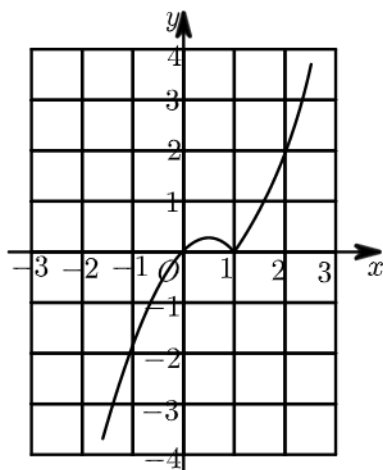
(2) 当 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有一个公共点 ,

当 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有两个公共点 ,

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有三个公共点 .

解析

(1) 作出函数图象如图 :



函数的单调递增区间是 $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$,

单调递减区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

(2) 当 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有一个公共点 ,

当 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有两个公共点 ,

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时 , 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有三个公共点 .

