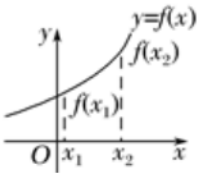
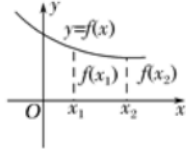


# 01函数的单调性

## 1. 单调函数的概念

### 1. 单调函数的定义

|      | 增函数                                                                                                      | 减函数                                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 定义   | 一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 $I$ ：如果对于定义域 $I$ 内某个区间 $D$ 上的任意两个自变量的值 $x_1, x_2$                                   |                                                                                                            |
|      | 当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是_____①                                     | 当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是_____③                                       |
| 图象描述 |  <p>自左向右看图象是_____②</p> |  <p>自左向右看图象是_____④</p> |

### 2. 单调区间的定义

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $D$ 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 $D$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的**单调区间**。

#### 教法备注

【答案】①增函数；②上升的；③减函数；④下降的



单调性的判断与求解

1

2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第6题5分

下列函数，在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是（ ）。

- A.  $y = -|x|$       B.  $y = -\frac{1}{x}$       C.  $y = 1 - x$       D.  $y = x^2 - x$

答案

B

**解析** A选项：在 $(0, +\infty)$ 上单减；  
 B选项：在 $(0, +\infty)$ 上单增；  
 C选项：在 $(0, +\infty)$ 上单减；  
 D选项：在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单减，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单增。  
 故选B.

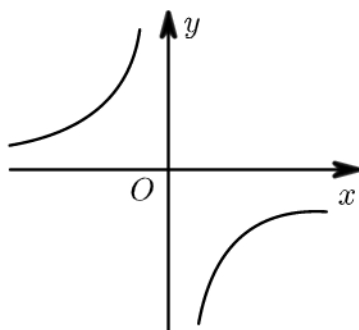
**2 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第6题4分**

函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的单调递增区间是( ) .

- A.  $(0, +\infty)$       B.  $(-\infty, 0)$       C.  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$       D.  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**答案** C

**解析**  $y = -\frac{2}{x}$ 草图如下：



$\therefore$ 单调递增区间为 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  ,  
 故选C .

**3 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期中第17题10分**

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 2 - ax, & x > 0 \end{cases}$  . 若 $f(1) = 4$  , 求： $f(x)$ 的单调区间 .

**答案**  $(-\infty, 0)$ 为单调递减区间；  
 $(0, +\infty)$ 为单调递增区间 .

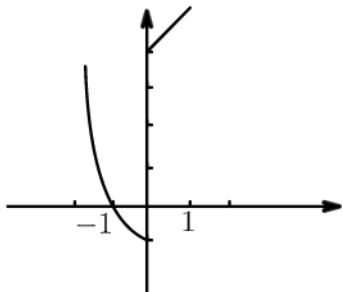
**解析**  $x = 1 > 0$  ,

$$f(1) = 2 - a = 4,$$

$$\therefore a = -2,$$

$$\therefore x > 0 \text{ 时}, f(x) = 2 + 2x,$$

$f(x)$  图形如下：



故  $(-\infty, 0)$  为单调递减区间；

$(0, +\infty)$  为单调递增区间。

### 3. 单调区间的证明

第一步：取值，在指定的区间任取  $x_1, x_2$ ，且令  $x_1 < x_2$ ；

第二步：作差，构造差式  $f(x_1) - f(x_2)$

第三步：定号，利用已知的  $x_1 < x_2$  判断差式  $f(x_1) - f(x_2)$  的符号

第四步：判断，\_\_\_\_\_

#### 教法备注

【答案】同号为增，异号为减

### 4. 函数的最值

|    |                                         |                                        |
|----|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| 前提 | 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $I$ ，如果存在实数 $M$ 满足 |                                        |
| 条件 | (1) 对于任意 $x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ ；  | (3) 对于任意 $x \in I$ ，都有 $f(x) \geq M$ ； |
|    | (2) 存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$     | (4) 存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$    |
| 结论 | $M$ 为最大值                                | $M$ 为最小值                               |



求解函数的最值

4

2020~2021 学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第 8 题

$y = \frac{2}{x}$  在区间  $[2, 4]$  上的最大值、最小值分别是 ( )。

A.  $1, \frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{2}, 1$

C.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

D.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

答案 A

解析  $\because y = \frac{2}{x}$  在区间  $[2, 4]$  上单调递减, 所以  $y_{\max} = \frac{2}{2} = 1, y_{\min} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

5 2020~2021学年天津河西区高一上学期期中第7题4分

函数  $f(x) = |x - 3| - |x + 1|$  的最大值和最小值分别是 ( ) .

A. 4和0

B. 4和-4

C. 0和-4

D. 既无最大值, 也无最小值

答案 B

解析 ①  $x > 3, f(x) = x - 3 - (x + 1) = -4$  ;

②  $-1 \leq x \leq 3, f(x) = (3 - x) - (x + 1) = 2 - 2x$  ,

$\because -1 \leq x \leq 3$  ,

$\therefore -6 \leq -2x \leq 2$  ,

$\therefore -4 \leq 2 - 2x \leq 4$  ,

$\therefore f(x) \in [-4, 4]$  ;

③  $x \leq -1$  ,

$f(x) = -(x - 3) + (x + 1) = 4$  .

综上  $f(x) \in [-4, 4]$  .

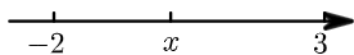
故选B .

6 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第12题4分

函数  $y = |x + 2| + |x - 3|$  的最小值是 \_\_\_\_\_ .

答案 5

**解析**  $|x+2|+|x-3|$  即  $x$  到  $-2$  与到  $3$  的距离和，



由几何意义知，最小值为5.

精进不休 日新月异

7 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期中第20题8分

已知函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$ )，若函数  $f(x)$  的最小值是  $f(-1) = 0$  且  $f(0) = 1$ .

- (1) 设  $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(x) & (x < 0) \end{cases}$ ，求  $g(1) + g(-1)$  的值.
- (2) 在(1)的条件下求  $g(x)$  在区间  $[t, t+2]$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 的最大值.

**答案** (1) 4.

- (2)  $t \leq -3$  时， $g(x)_{\max} = -(t+3)^2$ ；  
 $-3 < t < -2$  时， $g(x)_{\max} = 0$ ；  
 $-2 \leq t < -1$ ， $g(x)_{\max} = (t+3)^2$ ；  
 $t \geq -1$  时， $g(x)_{\max} = (t+3)^2$ .

**解析** (1)  $f(x) = a(x+1)^2$ ,

$$\text{又} \because f(0) = 1,$$

$$\therefore 1 = a,$$

$$\therefore f(x) = (x+1)^2,$$

$$g(1) = f(1) = 4,$$

$$\therefore g(-1) = -f(-1) = 0,$$

$$\therefore g(1) + g(-1) = 4.$$

$$(2) \quad g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & (x \geq 0) \\ -(x+1)^2 & (x < 0) \end{cases},$$

$$\text{i. } t+2 \leq -1 \text{ 时即 } t \leq -3 \text{ 时},$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [t, t+2] \text{ 单增},$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(t+2) = -(t+3)^2;$$

ii.  $t < -1 < t+2 < 0$  时,  $-3 < t < -2$  时,

$g(x)$  在  $[t, -1]$  上增, 在  $[-1, t+2]$  上减,  $g(x)_{\max} = g(-1) = 0$ ;

iii.  $t < -1 < 0 \leq t+2$  时即  $-2 \leq t < -1$ ,

$g(x)$  在  $[t, -1]$  上增,

在  $[-1, 0]$  上减,

在  $[0, t+2]$  上增,

$$g(x)_{\max} = \max\{g(-1), g(t+2)\}$$

$$= \max\{0, (t+3)^2\}$$

$$= (t+3)^2;$$

iv.  $t \geq -1$  时,  $g(x)_{\max} = g(t+2) = (t+3)^2$ .



单调区间的证明及最值求解

8

2019~2020 学年天津和平区天津市第二南开中学高一上学期期中第21题6分

已知函数  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ .

(1) 证明: 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数.

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $[1, 17]$  上的最大值和最小值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 函数  $f(x)$  在区间  $[1, 17]$  上的最大值和最小值分别为  $\frac{11}{6}$  和  $\frac{1}{2}$ .

解析

$$(1) f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1},$$

设  $x_1 > x_2 > 0$ ,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_2+1} - \frac{3}{x_1+1}$$

$$= \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)},$$

$\because x_1 > x_2 > 0$ ,

$\therefore x_1 - x_2 > 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$ ,

$$\therefore \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0,$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$ .

所以函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数 .

(2) 由 (1) 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数 ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  在区间  $[1, 17]$  上也是增函数 ,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = \frac{2 \times 1 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} ,$$

$$f(x)_{\max} = f(17) = \frac{2 \times 17 - 1}{17 + 1} = \frac{11}{6} .$$

所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, 17]$  上的最大值和最小值分别为  $\frac{11}{6}$  和  $\frac{1}{2}$  .

9 2019~2020学年10月天津河西区天津市第四十二中学高一上学期月考第20题8分

已知函数  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$  ,  $x \in [3, 5]$  .

(1) 判断函数  $f(x)$  的单调性 , 并利用定义证明 .

(2) 求函数  $f(x)$  的最大值和最小值 .

答案

(1)  $f(x)$  在  $[3, 5]$  上为增函数 , 证明见解析 .

(2)  $f(x)$  在  $[3, 5]$  上的最大值为  $f(5) = \frac{4}{7}$  , 最小值为  $f(3) = \frac{2}{5}$  .

解析

(1)  $f(x)$  在  $[3, 5]$  上为增函数 .

证明 : 任取  $x_1, x_2 \in [3, 5]$  , 有  $x_1 < x_2$  ,

$$\begin{aligned} \therefore f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} - \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2} \\ &= \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} , \end{aligned}$$

$$\because x_1 < x_2 ,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0 ,$$

$$\text{又} \because x_1, x_2 \in [3, 5] ,$$

$$\therefore (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 ,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 ,$$

$$\text{即} f(x_1) < f(x_2) ,$$

$\therefore f(x)$  在  $[3, 5]$  上是增函数 .

(2)  $\because f(x)$  在  $[3, 5]$  上的是增函数 ,

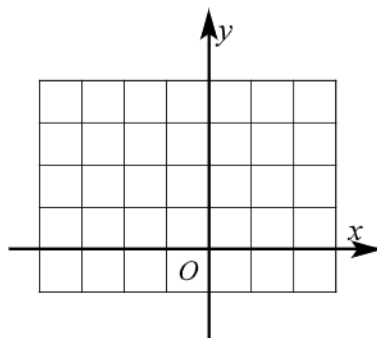
$$\therefore f(x) \text{ 在 } [3, 5] \text{ 上的最大值为 } f(5) = \frac{5-1}{5+2} = \frac{4}{7} ,$$

$$f(x) \text{ 在 } [3, 5] \text{ 上的最小值为 } f(3) = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5} .$$

10 2019~2020学年天津河北区高一上学期期末第18题12分

给定函数  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = (x + 1)^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(1) 在给定的同一直角坐标系中画出函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象.



(2)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 记  $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ , 请用解析法表示函数  $M(x)$ .

(3) 请利用函数单调性定义证明函数  $M(x)$  在  $x \in [1, +\infty)$  上的单调性.

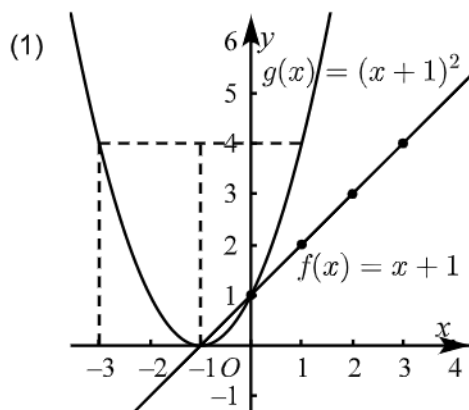
答案

(1) 画图见解析.

$$(2) M(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \\ x+1, & x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

(3) 证明见解析.

解析



(2) 通过 (1) 可以得函数图象, 根据  $f(x)$  与  $g(x)$  的函数图象与  $M(x)$  定义可知:

$$\text{当 } x \leq -1 \text{ 时, } M(x) = g(x) = (x + 1)^2;$$

$$\text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时, } M(x) = f(x) = x + 1;$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } M(x) = g(x) = (x + 1)^2.$$

$$\therefore M(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \\ x+1, & x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

(3) 由 (2) 可知, 当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $M(x) = (x + 1)^2$ .

在区间 $[1, +\infty)$ 上任取 $x_1, x_2$ , 令 $x_1 < x_2$ ,

$$\therefore M(x_1) - M(x_2) = (x_1 + 1)^2 - (x_2 + 1)^2 = (x_1 + x_2 + 2) \cdot (x_1 - x_2).$$

$$\therefore 1 \leq x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0.$$

$$\therefore M(x_1) - M(x_2) < 0.$$

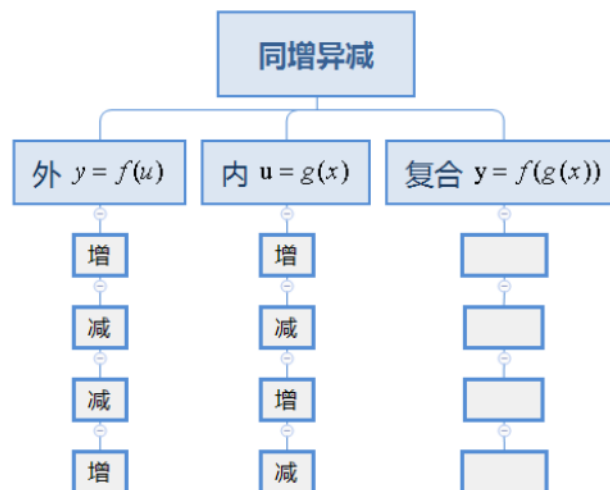
$$\therefore M(x_1) < M(x_2).$$

$\therefore M(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

## 2. 复合函数与分段函数的单调性

### 1. 复合函数单调性

复合函数单调性可简记为“**同增异减**”，即内外函数的单调性相同时递增，相异时递减.



#### 教法备注

【教师备注】一般后面学习基本初等函数后考察较多，前期考察较少。

【答案】

| 外 $y = f(u)$ | 内 $u = g(x)$ | $y = f(g(x))$ |
|--------------|--------------|---------------|
| 增            | 增            | 增             |
| 减            | 减            | 增             |
| 减            | 增            | 减             |
| 增            | 减            | 减             |



复合函数单调性

11

2020~2021学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中（七校联考）第4题4分

函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$  的单调递减区间为 ( ) .

A.  $(-\infty, -1]$

B.  $(-\infty, 1]$

C.  $[1, +\infty)$

D.  $(3, +\infty)$

教法备注

【补充】如果函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ ，注意这道题的求解办法和上述问题的差异。

补充题结果： $(-\infty, 1)$  或  $(-\infty, 1]$  上单调递减

答案

A

解析

由题意可得函数的定义域为  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$  .

结合二次函数  $t = x^2 - 2x - 3$  的性质，可知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1]$  上单调递减，在  $[3, +\infty)$  上单调递增 .

12

2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第4题3分

函数  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  的单调递增区间为 ( ) .

A.  $(-\infty, 1)$

B.  $(1, 2)$

C.  $(0, 1)$

D.  $(1, +\infty)$  .

教法备注

【教师备注】注意内部函数的开口方向

答案 C

**解析** 由  $2x - x^2 \geq 0$  解得函数的定义域为  $[0, 2]$ ，令  $m = 2x - x^2$  在  $[0, 2]$  上单调递增区间为  $(0, 1)$ ，且幂函数  $f(m) = \sqrt{m}$  在定义域上单调递增，  
所以函数  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  单调递增区间为  $(0, 1)$ 。  
故选 C。

13 2019~2020 学年天津高一上学期期中六校联考第 5 题 4 分

函数  $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$  的单调递增区间是 ( )。

- A.  $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$       B.  $[4, +\infty)$       C.  $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$       D.  $\left[1, \frac{5}{2}\right), [4, +\infty)$

答案 B

**解析** 令  $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ ，  
解得  $x \geq 4$  或  $x \leq 1$ ，  
而函数  $y = x^2 - 5x + 4$  的对称轴是  $x = \frac{5}{2}$ ，  
由复合函数的同增异减的原则，  
故函数  $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$  的单调递增区间是  $[4, +\infty)$ 。  
故选 B。

## 2. 研究分段函数的单调性：

服从的原则还是先局部后整体

(1) 方法一：做出图象然后由图象观察

(2) 方法二：若函数  $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b) \\ f_2(x), & x \in [b, c] \end{cases}$ ，

若要保证  $f(x)$  在定义域  $[a, c]$  内单调递增，则需要满足下面三个条件：

①  $f_1(x)$  在区间  $[a, b)$  上单调递增；②  $f_2(x)$  在区间  $[b, c]$  上单调递增；③  $f_1(b) \leq f_2(b)$



分段函数单调性

教法备注

【教师备注】历年来试卷中出现的次数特别多，引起重视。

本节由于是初学，涉及到的函数以一次函数、二次函数、反比例函数为主。

14 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第15题4分

函数  $f(x) = \begin{cases} (2-8a)x+3a, & x \leq 0 \\ -x^2-ax+1, & x > 0 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数，则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

答案  $a \geq \frac{1}{3}$

解析  $\because f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数，

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} 2-8a < 0 \\ -\frac{a}{2} \leq 0 \\ 3a \geq 1 \end{cases}, \\ \therefore \begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ a \geq 0 \\ a \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \\ \therefore a \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

15 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第9题3分

已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2-ax-5, & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x}, & (x > 1) \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数，则  $a$  的取值范围是 ( ) .

- A.  $(-\infty, -2]$       B.  $[-2, 0)$       C.  $[-3, 0)$       D.  $[-3, -2]$

答案 D

解析  $f(x) = \begin{cases} -x^2-ax-5, & (x \leq 1) \\ \frac{a}{x}, & (x > 1) \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数，

$\therefore$  二次函数  $-x^2-ax-5$ ，开口向下， $\therefore$  在  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$  为增函数，

故得对称轴  $x = -\frac{a}{2} \geq 1$ ，

解得： $a \leq -2$  .

反比例函数  $\frac{a}{x}$  在  $(1, +\infty)$  必然是增函数，则： $a < 0$ ；

又： $\because$  函数  $f(x)$  是增函数，

则有： $\frac{a}{1} \geq -(1)^2 - a \times 1 - 5$ ，解得： $a \geq -3$  .

所以： $a$  的取值范围  $[-3, -2]$  .

故选D.

16 2020~2021学年天津滨海新区塘沽第一中学高一上学期期中第17题5分

已知函数  $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x + 3a, & x < 2 \\ \frac{a}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$  满足对任意的实数  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

答案  $\left[\frac{4}{13}, \frac{1}{2}\right)$

解析 根据条件知,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} 2a-1 < 0 \\ a > 0 \\ 2(2a-1) + 3a \geq \frac{a}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \frac{4}{13} \leq a < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{4}{13}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{故答案为: } \left[\frac{4}{13}, \frac{1}{2}\right).$$

17 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第14题4分

函数  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 1 & (x > 2) \\ -x + 1 & (x \leq 2) \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的单调递减函数, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

答案  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

解析  $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{1}{2a} \leq 2 \\ a \cdot 2^2 + 2 - 1 \leq -1 \end{cases},$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } (-\infty, -\frac{1}{2}].$$

### 3. 函数单调性的应用



含参问题

18 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第4题3分

函数  $f(x) = ax^2 + 2x - 1$  , 在  $[1, 2]$  上是增函数, 则  $a$  的取值范围是 ( ) .

- A.  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  B.  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$   
C.  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$  D.  $(0, +\infty)$

答案 B

解析 由函数  $f(x) = ax^2 + 2x - 1$  在  $[1, 2]$  上是增函数,

当  $a = 0$  时,  $f(x) = 2x - 1$ , 符合;

当  $a > 0$  时,  $f(x) = ax^2 + 2x - 1$  对称轴为  $x = -\frac{1}{a} < 0$ ,

此时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上为增函数,

当  $a < 0$  时,  $f(x)$  对称轴为  $x = -\frac{1}{a} > 0$ , 开口向下,

则有  $-\frac{1}{a} \geq 2$ , 解得  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ ,

综上所述,  $a \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

故选B.

19 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第7题4分

已知  $f(x) = -x^2 + 2ax + 3$  与函数  $g(x) = |x - 3a|$  在区间  $[1, 2]$  上都是减函数, 则  $a$  的取值范围为 ( ) .

- A.  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  B.  $[1, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$   
C.  $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$  D.  $(1, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

答案 A

解析  $f(x) = -x^2 + 2ax + 3$ , 对称轴  $x = -\frac{2a}{2 \times (-1)} = a$ ,

$\therefore a \leq 1$ ,

$g(x) = |x - 3a|$ , 令  $x - 3a = 0$ ,

$\therefore x = 3a$ ,

$\therefore 3a \geq 2$ ,

$$\therefore a \geq \frac{2}{3},$$

$$\text{综上 } \frac{2}{3} \leq a \leq 1.$$

故选A.

20 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第6题3分

函数  $f(x) = kx^2 + (3k - 2)x - 5$  在  $[1, +\infty)$  单调递增, 则  $k$  的取值范围是 ( ).

- A.  $(0, +\infty)$       B.  $(-\infty, \frac{2}{5}]$       C.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$       D.  $[\frac{2}{5}, +\infty)$

答案 D

解析 当  $k = 0$  时,  $f(x) = -2x - 5$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 不符合题意, 当时  $k \neq 0$  时,

$\therefore$  函数  $f(x) = kx^2 + (3k - 2)x - 5$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore \begin{cases} k > 0 \\ \frac{2 - 3k}{2k} \leq 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } k \geq \frac{2}{5},$$

综上所述:  $k$  的取值范围是  $[\frac{2}{5}, +\infty)$

故选D.

21 2020~2021学年天津河东区高一上学期期中第8题4分

若  $f(x) = -x^2 + 2ax$  与  $g(x) = \frac{a}{x+1}$  在区间  $[1, 2]$  上都是减函数, 则  $a$  的取值范围是 ( ).

- A.  $(-1, 0) \cup (0, 1]$       B.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(0, 1]$

答案 D

解析  $f(x) = -(x - a)^2 + a^2,$

当  $a \leq 1$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上是减函数;

$$g(x) = \frac{a}{x+1},$$

当  $a > 0$  时,  $g(x)$  在  $[1, 2]$  上是减函数,

则  $a$  的取值范围是  $0 < a \leq 1,$

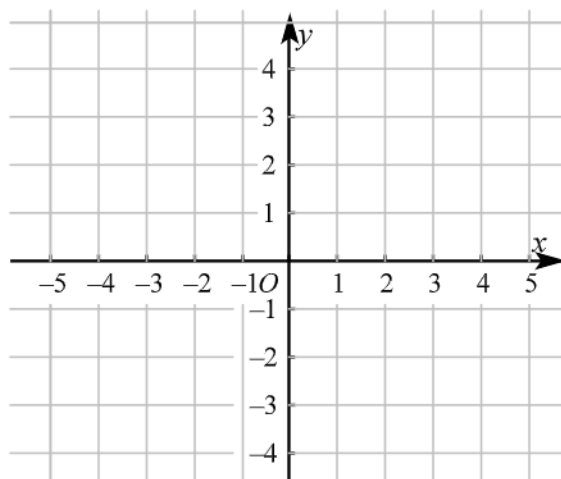
故选D.

利用图像求解问题

22 2020~2021学年天津和平区天津市第五十五中学高一上学期期中第18题12分

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$  .

- (1) 若  $f(a) = 3$  , 求实数  $a$  的值 .
- (2) 在给定的平面直角坐标系内 , 画出函数  $f(x)$  的图象 .



- (3) 指出函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 3]$  上的单调区间及值域 .

教法备注

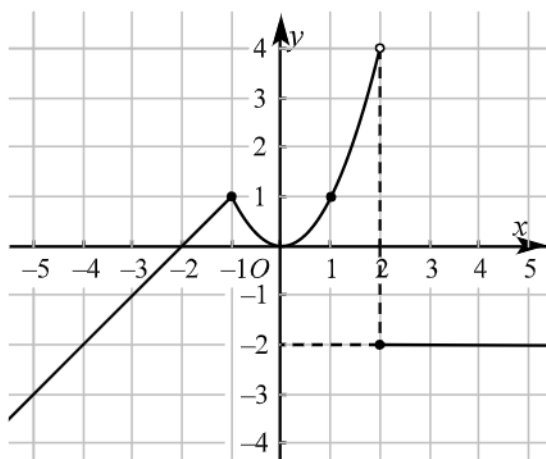
【教师备注】第三问注意  $[2, 3]$  上无单调性

答案

- (1)  $\sqrt{3}$  .
- (2) 画图见解析 .
- (3) 单调递增区间为  $[-2, -1]$  ,  $[0, 2)$  , 单调递减区间  $(-1, 0)$  , 值域  $\{-2\} \cup [0, 4)$  .

解析

- (1) 若  $a \leq -1$  , 则  $a+2=3$  , 则  $a=1$  (舍去) ,  
 若  $-1 < a < 2$  , 则  $a^2=3$  , 则  $a=\sqrt{3}$  ,  $a=-\sqrt{3}$  (舍去) ,  
 若  $a \geq 2$  , 则  $-2=3$  , 不符合 , 舍去 ,  
 综上 :  $a=\sqrt{3}$  .
- (2) 画出  $f(x)$  图象如图 .



## 豪厘不伐 将用斧柯

已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数,  $A(0, -1)$ ,  $B(3, 1)$  是其图象上的两点, 那么  $|f(x+1)| < 1$  的解集的补集是 ( ) .

- A.  $(-1, 2)$   
B.  $(1, 4)$   
C.  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$   
D.  $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

### 解析

$\therefore f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数 ,  
 又  $\therefore$  过  $A(0, -1)$  ,  $B(3, 1)$  ,  
 $\therefore f(0) = -1$  ,  $f(3) = 1$  ,  
 $\therefore |f(x+1)| < 1$  ,  
 $\therefore -1 < f(x+1) < 1$  ,  
 $\therefore 0 < x+1 < 3$  ,  
 $\therefore -1 < x < 2$  ,  
 $\therefore$  其补集为  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$  .  
 故选 C .

## 解不等式

24 2020~2021学年天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一上学期期中第15题4分

已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的增函数，则关于 $x$ 的不等式 $f(x-2) < f(1-x)$ 的解集为\_\_\_\_\_.

答案  $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ 解析  $\because$  定义域为 $[-1, 1]$ ,

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq x-2 \leq 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 1 \end{cases},$$

解得 $1 \leq x \leq 2$ , ① $\because f(x)$ 为增函数,

$$\therefore x-2 < 1-x,$$

解得 $x < \frac{3}{2}$ , ②综合①②得 $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$ .