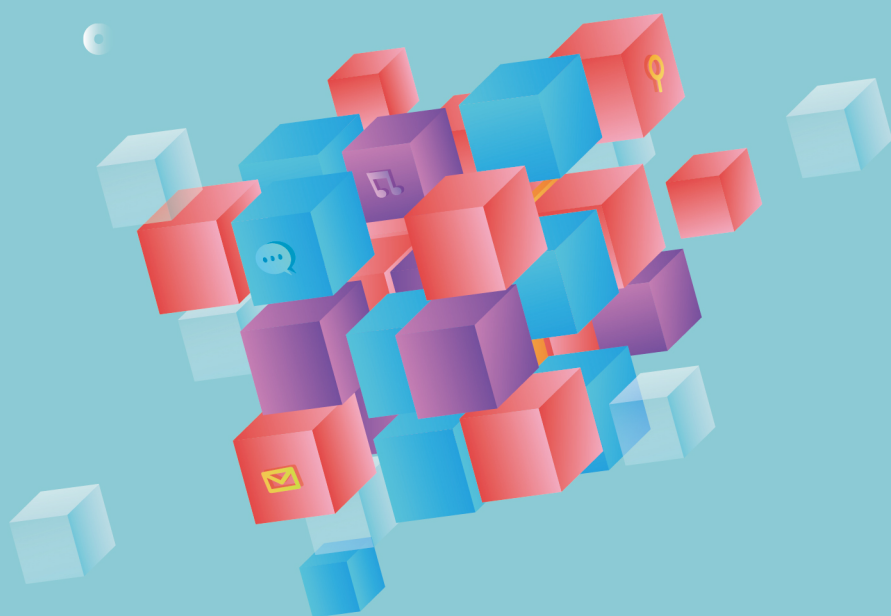


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

在此前，我们接触并学习到了如何求解不等式，而利用不等式表示数字或式子的大小或包含关系有时并不是很简洁明了，而为了达到这一目的，我们在此模块将对集合部分的知识进行学习。当我们掌握了“区间表示法”并了解了集合的交并包含关系后，就会发现很多复杂的不等式关系竟然变得清晰起来啦~

在此基础上，我们又会进一步对集合的包含关系从另一个角度进行学习研究，这便是简易逻辑部分主要研究的内容啦，清晰而又直观的“韦恩图”将会把你的疑惑——解开。

最后，便是基本不等式这一题型多变的章节了，大家不妨开动脑筋，看看这和我们之前提到的解不等式有什么差别和联系！

目 录

第 1 讲 集合的概念与关系..... 01

- 知 识 点 1 集合的概念
- 知 识 点 2 集合中元素的性质
- 知 识 点 3 集合的分类与表示方法
- 知 识 点 4 集合之间的关系
- 知 识 点 5 子集个数的确定

第 2 讲 集合的运算.....11

- 知 识 点 1 交集、并集与补集运算
- 知 识 点 2 集合关系与运算的常用结论

第 3 讲 常用逻辑用语.....17

- 知 识 点 1 充分条件与必要条件
- 知 识 点 2 全称量词与存在量词及其命题

第 4 讲 基本不等式.....23

- 知 识 点 1 基本不等式的原型及三个基础公式
- 知 识 点 2 扩展 - 对勾函数
- 知 识 点 3 一个参数的均值考查形式
- 知 识 点 4 两个参数的均值考查形式



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

集合的概念与关系





集合的概念

1. 集合的含义

一般地，我们把研究范围内的对象统称为**元素**，通常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

把满足某种要求或者标准的对象（元素）的总体称之为**集合**（简称为**集**），通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示。

2. 特别说明：集合中元素的构成内容 ——

①集合的元素可以是任何研究对象，并不局限于数学元素。

②一个集合的元素个数并没有限制。一个元素可以构成一个集合，没有元素也可以构成集合

3. 元素与集合的关系

关系	读法	记法
a 是集合 A 中的元素	a 属于集合 A	$a \in A$
a 不是集合 A 中的元素	a 不属于集合 A	$a \notin A$

注意：元素与集合之间只有两种关系：属于 ($\in$) 和不属于 ($\notin$)。



集合中元素的性质



确定性

集合里的元素必须是确定的，

即给定一个集合，按照该集合的构成标准能够明确判定一个对象是否属于这个集合。

1 下列几组对象可以构成集合的是 ()。

A. 充分接近 π 的实数的全体

B. 某单位所有身高在 1.7m 以上的人

C. 世界著名的科学家

D. 善良的人



互异性

集合中的元素一定是不同（互异）的。

也就是说，相同的元素在一个集合中只能出现一次。

2 已知集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成某一三角形的三边长，那么此三角形一定不是 ()。

A. 直角三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 等腰三角形

3 已知集合 $M = \{1, m+2, m^2+4\}$ ，且 $5 \in M$ ，则 m 的值为 ()。

A. -1 或 1

B. 1 或 3

C. -1 或 3

D. 1, -1 或 3

4 已知集合 $A = \{a-2, 2a^2+5a, 12\}$ ，且 $-3 \in A$ ，则 a 等于 ()。

A. -1

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$ 或 -1



无序性

集合中元素的排列顺序无先后之分



集合的分类

1. 按元素的属性:

数集 (构成集合中的元素是数)、点集 (构成集合中的元素是点) 等.

2. 按元素的个数:

有限集、无限集.

3. 常见数集的表达方法

为了书写方便, 我们用特定的字母来表示一些常见数集, 下面是几种常见数集的表达方法:

① 0 和正整数构成的集合叫做**自然数集**, 记作 $\mathbf{N}$.

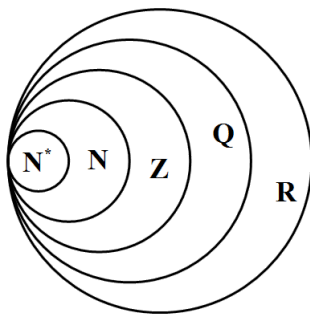
② 正整数构成的集合叫做**正整数集**, 记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

③ 全体整数构成的集合叫做**整数集**, 记作 $\mathbf{Z}$.

④ 全体有理数构成的集合叫做**有理数集**, 记作 $\mathbf{Q}$.

⑤ 全体实数构成的集合叫做**实数集**, 记作 $\mathbf{R}$.

4. 常见数集的关系



5 用 “ $\in$ ” 或 “ $\notin$ ” 符号填空:

(1) $3\frac{2}{7}$ _____ $\mathbf{Q}$.

(2) 3^2 _____ $\mathbf{N}$.

(3) π _____ $\mathbf{Q}$.

(4) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{R}$.

(5) $\sqrt{9}$ _____ $\mathbf{Z}$.

(6) $(\sqrt{5})^2$ _____ $\mathbf{N}$.

6 下面四个说法中正确的个数是 ().

① $\mathbf{N}$ 中的最小数为 1;

② 若 $a \notin \mathbf{N}$, 则 $-a \notin \mathbf{N}$;

③ 若 $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, 则 $a+b$ 的最小值为 2;

④ 所有小的正数组成一个集合.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



集合的表示方法



列举法

1. 列举法的定义

把集合中的元素一一列举出来，中间用逗号隔开，并用大括号“{}”括起来表示集合的方法叫做**列举法**。

2. 举例说明：

(1) 数学：绝对值小于 10 的偶数组成的集合用列举法表示为：_____

(2) 语文：中国四大名著，又称四大小说，是指：_____（四部中国古典章回体小说）

(3) 英语：单词放弃 abandon 的字母组成用列举法表示为：_____

(4) 物理：下列措施中能减弱噪声的做法序号用列举法表示：_____

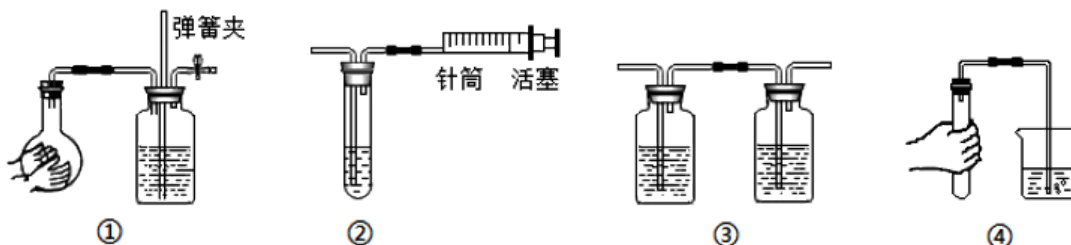
①机动车辆在市内严禁鸣笛

②学校将高音喇叭换成许多小音箱

③清除城市垃圾，保持环境整洁

④在城市街道两旁种草植树

(5) 化学：下列装置中，若不添加其他仪器，也不改变装置结构，能检查装置气密性的是仪器序号用列举法表示：_____



(6) 生物：细胞的基本结构包括用列举法表示为：_____

(7) 地理：如世界四大洋用列举法表示为：_____

(8) 历史：下列近代条约有涉及香港内容的序号用列举法表示为：_____

①《马关条约》②《北京条约》③《天津条约》④《南京条约》

(9) 政治：对下表中“微行为”的“微点评”正确的序号用列举法为：

序号	微行为	微点评
①	网友要求见面，爽快答应，只身一人前往	缺乏自我保护意识
②	照搬照抄班级学霸的课堂笔记	科学高效的学习方法
③	吃好喝好就是守护生命	守护生命还应养护精神
④	为班集体事务出谋划策	出风头，张扬个性



3. 列举法的要求

——列举、不重不漏

4. 列举法的适用范围

- ①元素个数少且有限时，全部列举；
- ②元素个数多且有限时，可以列举部分，中间用省略号表示；
- ③元素个数无限但有规律时，可以列举前面一部分，后面用省略号表示。



描述法

1. 描述法的定义

用集合所含元素的共同特征表示集合的法称为**描述法**。

用符号表示便是 $A = \{x \in I | p(x)\}$

其中的 x 表示集合的**代表元素**， I 表示元素 x 的**取值范围**， $p(x)$ 则表示元素 x 的**共同特征**。

- 7 已知集合 $P = \{-2, -1, 0, 1\}$ ，集合 $Q = \{y | y = |x|, x \in P\}$ ，则 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 8 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 + 4x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素，则 $a = (\quad)$ 。
A. $a = 16$ 或 $a = 0$ B. $a = 4$ 或 $a = 0$ C. $a = 2$ 或 $a = 0$ D. $a = 2$ 或 $a = 4$
- 9 若集合 $A = \{x | x^2 - x - 12 \leq 0\}$ ， $B = \{x | |x| < 1\}$ ， $C = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，则集合 $C = (\quad)$ 。
A. $\{x | -3 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 1 \leq x \leq 4\}$ B. $\{x | -3 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 1 < x \leq 4\}$
C. $\{x | -3 \leq x < -1, \text{ 或 } 1 \leq x \leq 4\}$ D. $\{x | -3 \leq x < -1, \text{ 或 } 1 < x \leq 4\}$
- 10 已知集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x + y \in A\}$ ，则 B 中所含元素的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

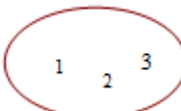


图示法

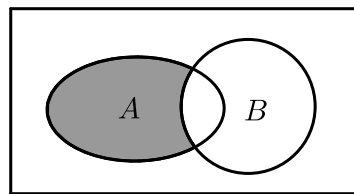
1. 图示法的定义

Venn 图：Venn 图是用**封闭曲线**来表示集合的，它能直观的表现集合元素的构成及集合之间的关系。

2. 举例说明

例如： 表示集合 $\{1, 2, 3\}$ 。

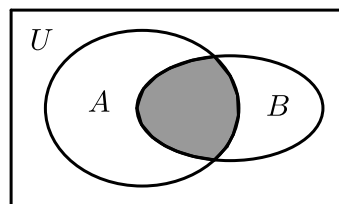
- 11 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 2\}$ ，则下图中阴影部分所表示的集合为 $(\quad)$ 。



- A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$



- 12 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x}{3-x} \geq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 9\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ().



- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ D. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$



区间表示法

1. 区间表示法的定义

在数学中, 我们经常研究**数轴上一段连续的实数的集合**, 比如集合 $\{x \mid 1 < x < 4\}$, 为了更为方便的表示这类集合, 我们引入了集合的**区间表示法**.

2. 常用写法

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$,

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
$\{x \mid x \geq a\}$	左闭右开区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x \leq a\}$	左开右闭区间	$(-\infty, a]$	
$\{x \mid x > a\}$	开区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x < a\}$	开区间	$(-\infty, a)$	

3. 解释说明

①其中, a, b 叫做区间的**端点**.

②其中 “ $+\infty$ ” 读作 “**正无穷大**”, 表示数值无限大; “ $-\infty$ ” 读作 “**负无穷大**”, 表示数值无限小



集合之间的关系



子集

1. 子集的定义

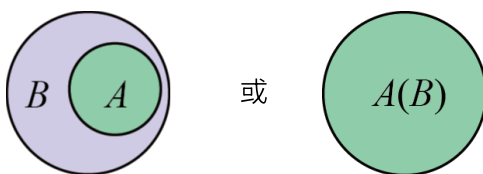
对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的 **子集**. 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作 " A 含于 B " 或 " B 包含 A ".

2. 定义的符号表示

若 $\forall x \in A$ 都有 $x \in B$, 则 $A \subseteq B$

这是作为证明 A 是集合 B 的子集的最基本方法

3. 子集的图示



3. 判断集合不是子集关系的依据

当集合 A 不包含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A) 时, 记作 $A \not\subseteq B$, 此时集合 A 中至少存在一个元素不是集合 B 的元素.

4. 包含关系具有传递性

即如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (借助于 Venn 图比较好理解).

5. 集合和它本身的关系

根据定义不难得到如下结论: **任何一个集合都是它本身的子集**, 即 $A \subseteq A$.

- 13 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 14 已知 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $B = \{x | a < x < a + 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 15 设集合 $A = \{x | -1 \leq x + 1 \leq 6\}$, $B = \{x | m - 1 < x < 2m + 1\}$, 若 $A \supseteq B$, 则 m 的取值范围是 _____.
- 16 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.



- 17 已知 $I = \{1, 2, 3\}$, A, B 是集合 I 的两个非空子集, 且 A 中所有数的和大于 B 中所有数的和, 则集合 A, B 共有 _____ 对.



真子集

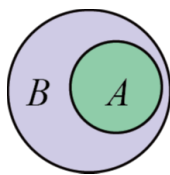
1. 真子集的定义

如果 $A \subseteq B$, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**.
记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$, 读作 “ A 真包含于 B ” 或 “ B 真包含 A ”.

2. 真包含关系同样具有传递性

即如果 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

3. 真子集的图示



- 18 已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 19 已知 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $N = \{x | x^2 - 2x + a = 0\}$, 若 $N \subsetneq M$, 求 a 的取值范围.
- 20 集合 $M = \{x | x = 1 + a^2, a \in \mathbf{N}^*\}$, $P = \{x | x = a^2 - 4a + 5, a \in \mathbf{N}^*\}$, 则 M, P 的关系为 M _____ P



集合相等

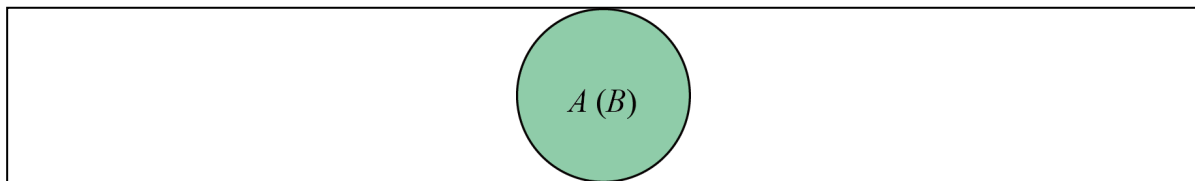
1. 集合相等的定义

如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素, 反过来, 集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素, 那么我们就说集合 A 与集合 B **相等**, 记作 $A = B$.

2. 集合相等在子集角度的描述

如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A \subseteq B$), 且集合 B 是集合 A 的子集 ($A \subseteq B$), 此时两集合的元素是一样的, 我们称集合 A 与集合 B **相等**.

3. 集合相等的图示



- 21 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a = ()$.
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2



22 下列集合中，表示同一集合的是 () .

- A. $M = \{(3, 2)\}$, $N = \{(2, 3)\}$ B. $M = \{1, 2\}$, $N = \{(1, 2)\}$
 C. $M = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $N = \{y | x + y = 1\}$ D. $M = \{3, 2\}$, $N = \{2, 3\}$



空集

1. 空集的定义

不含任何元素的集合叫**空集**，通常记为 $\emptyset$.

2. 数 0、 $\{0\}$ 、 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$ 的关系

数 0 不是集合，是一个元素；

$\{0\}$ 是含一个元素 0 的集合；

$\emptyset$ 是不含任何元素的集合（它既不是有限集也不是无限集）；

$\{\emptyset\}$ 是指以 $\emptyset$ 为元素的集合

3. 空集的规定

空集是任何集合的子集，即 $\emptyset \subseteq A$.

空集是任何非空集合的真子集，即 $\emptyset \subsetneq A (A \neq \emptyset)$.

4. 重点命题辨析

由于空集的存在，关于子集的下述定义其实是**错误**的：

若 $A \subseteq B$ ，则 A 是由 B 中的部分元素所组成的集合

23 下列四个集合中，是空集的是 () .

- A. $\{x | x + 3 = 3\}$ B. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$.
 C. $\{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ D. $\{x | x^2 \leq 0\}$



元素与集合、集合与集合的关系

1. 区分元素与集合、集合与集合关系

元素与集合的关系是属于与不属于的关系，用符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”表示

而集合与集合之间的关系是包含、不包含、真包含、相等的关系，用符号“ $\subseteq$ ”、“ $\not\subseteq$ ”、“ $\subsetneq$ ”、“ $=$ ”表示.

2. 集合间的包含关系

若 $A \subseteq B$ ，则 A 和 B 有两种可能的关系： $A \subsetneq B$ 或 $A = B$.

24 有下列四个命题：① $\{0\}$ 是空集，②若 $a \in \mathbf{N}$ ，则 $-a \notin \mathbf{N}$ ，③集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 有两个元素，④集合 $B = \left\{x \in \mathbf{Q} | \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\right\}$ 是有限集，其中正确命题的个数为 () .

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

25 已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$ ， N 为自然数集，则下列表示不正确的是 () .

- A. $1 \in M$ B. $M = \{-1, 1\}$ C. $\emptyset \subseteq M$ D. $M \subseteq N$



- 26 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x > -1\}$, 则 ().
- A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \subseteq A$ C. $\{0\} \in A$ D. $\emptyset \in A$



子集个数的确定

若有限非空集合 A 中含有 n 个元素, 则有:

- (1) 集合 A 的**子集**个数为 2^n .
 - (2) 集合 A 的**真子集**个数为 $2^n - 1$.
 - (3) 集合 A 的**非空子集**个数为 $2^n - 1$.
 - (4) 集合 A 的**非空真子集**个数为 $2^n - 2$.
- 27 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 2\}$ 的子集个数为 ().
- A. 4 B. 6 C. 7 D. 8
- 28 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | -x^2 + x + 2 > 0\}$, 则集合 A 的真子集个数为 ().
- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8
- 29 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0, x \in \mathbf{N}\}$, 则集合 A 的真子集有 ().
- A. 8 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 5 个
- 30 如果 $A = \{x | x^2 + 4x + 2a = 0\}$ 的子集共有 4 个, 那么 a 的取值集合是 ____.

第 2 讲

集合的运算





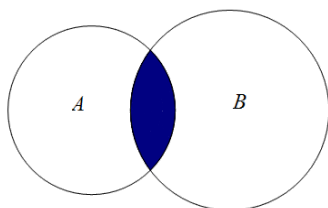
交集

1. 三种语言表述

(1) 文字语言: 由集合 A 和集合 B 的所有公共元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$

(2) 符号语言: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(3) 图形语言:



2. 常用运算性质

- ① $A \cap A = A$;
- ② $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- ③ $A \cap B = B \cap A$;
- ④ $A \cap B \subseteq A$.

- 1 已知集合 $A = \{1, 2, m^3\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cap B = B$, 则 $m =$ _____.
- 2 设全集 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{y | y = 2x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ().
A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{2, 4, 7, 9\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- 3 设集合 $A = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 10\}$, 则 $A \cap B =$ ().
A. $\{0, 3, 6, 9\}$ B. $\{3, 6, 9\}$ C. $\{3, 6\}$ D. $\{0, 3, 6\}$
- 4 若集合 $M = \{(x, y) | x + y = 0\}$, $P = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 则 $M \cap P$ 等于 ().
A. $(1, -1)$ B. $\{x = 1 \text{ 或 } y = 1\}$ C. $\{1, -1\}$ D. $\{(1, -1)\}$
- 5 集合 $M = \{(x, y) | 4x + y = 6\}$, $P = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}$, 则 $M \cap P =$ ().
A. $(1, 2)$ B. $\{1\} \cup \{2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{(1, 2)\}$
- 6 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-2}{x+1} \geq 0\right\}$, 则 $A \cap B$ 元素个数为 ().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 7 若集合 $A = \{x | 2x > 1\}$, $B = \{x | 2x^2 - x - 1 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ().
A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$ C. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$ D. $\{x | x > 1\}$



豪厘不伐 将用斧柯

- 8 设集合 $A = \{y | y = 2x - 1, 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.



精进不休 日新月异

- 9 集合 $A = \{0, a, 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 若 $A \cap B$ 中有两个元素, 则实数 a 的取值范围是 ().
 A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$



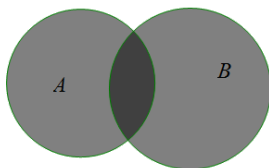
并集

1. 三种语言表述

(1) 文字语言: 由**所有属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素**组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**, 记作 $A \cup B$.

(2) 符号语言: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(3) 图形语言:



2. 常用运算性质

- ① $A \cup A = A$;
 ② $A \cup \emptyset = A$;
 ③ $A \cup B = B \cup A$;
 ④ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
 ⑤ $A \subseteq A \cup B$.
- 10 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | (x+1)(x-2) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B = ()$.
 A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- 11 设全集 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ().
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{2, 4, 5, 7\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- 12 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$, $B = \{x | |x| \leq 1\}$, 则 $A \cup B = ()$.
 A. $\{x | x \geq 1\}$ B. $\{x | x \geq -1\}$ C. $\{x | x \leq 1\}$ D. $\{x | x \leq -1\}$
- 13 集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 集合 $B = \left\{x \left| \frac{x-2}{x-1} < 0 \right.\right\}$, 则 $A \cup B = ()$.
 A. $(1, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-2, 2)$ D. $(0, 2)$
- 14 已知集合 $A = \{(x, y) | x - 2y = 0\}$, $B = \left\{(x, y) \left| \frac{y-1}{x-2} = 0 \right.\right\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.



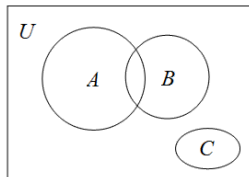
全集

三种语言表述

(1) 文字语言：如果集合 U 含有我们**所要研究的各个集合的全部元素**，则称 U 为**全集**。

(2) 符号语言：若 $A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U, \dots$ ，则 U 为全集。

(3) 图形语言：



- 15 设常数 $a \in \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$ ， $B = \{x | x \geq a-1\}$ ，若 $A \cup B = \mathbf{R}$ ，则 a 的取值范围为 ()。

A. $x \leq 2$

B. $x < 2$

C. $x > 2$

D. $x \geq 2$

- 16 设 $A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$ ， $B = \{x | a - 2x \geq 0\}$ 。

当 $A \cup B = \mathbf{R}$ 时，求实数 a 的取值范围。



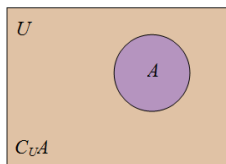
补集

1. 三种语言表述

(1) 文字语言：若集合 A 是集合 U 的一个子集，则称 **U 中所有不属于 A 的元素**所组成的集合称为 A 在 U 中的**补集**。

(2) 符号语言： $C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ 。

(3) 图形语言：



2. 补集与全集的关系

(1) 补集是相对于全集而言的，研究一个集合的补集之前一定要明确其所对应的全集

$C_U A$ 表示 U 为全集时 A 的补集，如果换成其他集合（如 $\mathbf{R}$ ）时，则记号中“ U ”也必须换成相应的集合（即 $C_{\mathbf{R}} A$ ）。

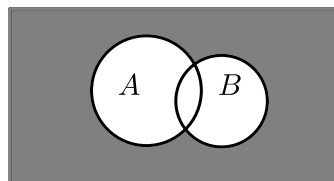
(2) 若 $x \in U$ ，则 $x \in A$ 和 $x \in C_U A$ 必有一个是正确的。



3. 常用运算性质

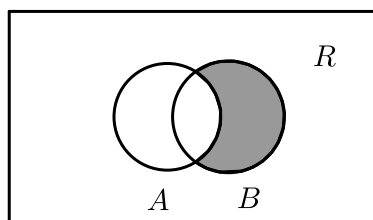
- ① $\complement_U \emptyset = U$,
- ② $\complement_U U = \emptyset$,
- ③ $\complement_U (\complement_U A) = A$,
- ④ $A \cap \complement_U A = \emptyset$,
- ⑤ $A \cup \complement_U A = U$.

- 17 记全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则图中阴影部分所表示的集合是 _____.



- 18 设集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{x \in U \mid x^2 + mx = 0\}$, 若 $\complement_U A = \{1, 2\}$, 则实数 $m =$ _____.

- 19 已知 R 是实数集, 集合 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \left\{x \mid 0 < x < \frac{3}{2}\right\}$, 则阴影部分表示的集合是 ().



- A. $[0, 1]$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1)$ D. $(0, 1)$



集合关系与运算的常用结论

1. 子集关系的交并理解

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

2. 交并关系的补集运算

$$\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B),$$

$$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$



子集的子集关系

- 20 集合 $A = \{x \mid x \leq a\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x < 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $a \geq 5$ B. $a \geq 4$ C. $a < 5$ D. $a < 4$

- 21 已知集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 m 的取值组成的集合是 ().

- A. $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ C. $\left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$



豪厘不伐 将用斧柯

- 22 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{x | mx - 6 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m = (\quad)$.
 A. 3 B. 2 C. 2 或 3 D. 0 或 2 或 3
- 23 已知 I 为全集, 集合 $M, N \subset I$. 若 $M \cap N = N$, 则 $(\quad)$.
 A. $\complement_I N \subseteq \complement_I M$ B. $M \subseteq \complement_I N$ C. $\complement_I M \subseteq \complement_I N$ D. $\complement_I N \subseteq M$
- 24 设集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < a\}$ 满足 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$.
 A. $\{a | a \geq 2\}$ B. $\{a | a \leq 1\}$ C. $\{a | a \geq 1\}$ D. $\{a | a \leq 2\}$
- 25 若 $A = \{x | x > a\}$, $B = \{x | x > 6\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



补集 的 交并运算

- 26 设集合 $U = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x \leq 8\}$, $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $T = \{3, 5, 7\}$, 则 $S \cap (\complement_U T) = (\quad)$.
 A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
- 27 已知 $\mathbf{R}$ 是实数集, 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x < 2\}$, $B = \{x | 2x - 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = (\quad)$.
 A. $\{1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$
- 28 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 16 < 0\}$, $B = \{x | -2 < x \leq 6\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ 等于 $(\quad)$.
 A. $(-4, 0)$ B. $(-4, -2]$ C. $(-4, 4)$ D. $(-4, -2)$
- 29 已知集合 $U = \{x | x \leq 4\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, 集合 $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, 求 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$, $A \cap (\complement_U B)$, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $\complement_U (A \cap B)$.
- 30 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{a, a^2\}$, 若 $M \cup N = M$, 则 a 的值为 $(\quad)$.
 A. -1 B. 0 C. 1 D. -1 或 1

第 3 讲

常用逻辑用语





充分条件与必要条件

1. 文字语言的符号表述

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由 p 可以推出 q ，记作“ $p \Rightarrow q$ ”，这时称 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件。

如果“若 p ，则 q ”为假命题，那么由 p 推不出 q ，记作 $p \nRightarrow q$ ，这时称 p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件。

2. 四种条件的定义

充分条件：若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 成立的充分条件。

必要条件：若 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的必要条件。

充分且必要条件：如果 $p \Leftrightarrow q$ ，则 p 是 q 的充要条件。

既不充分也不必要条件：如果 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的既不充分也不必要条件。

3. 利用集合的思想判别四种条件

设 $A = \{x | x = \text{满足条件 } P\}$ ， $B = \{x | x = \text{满足条件 } Q\}$ 。

设若 $A \subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**充分不必要条件**。

设若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**必要不充分条件**。

设若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**既不充分也不必要条件**。

设若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 p 是 q 的**充分且必要条件**。



判断前是后的什么条件

- 已知 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$ ，则“ $\frac{1}{a} < 1$ ”是“ $a > 1$ ”的()。
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的()。
 - 充分而不必要条件
 - 必要而不充分条件
 - 充分必要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的()。
 - 充分而不必要条件
 - 必要而不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 设 m, n 是整数，则“ m, n 为偶数”是“ $m + n$ 是偶数”的()。
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分又不必要条件



- 5 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $p: a < b$, $q: \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$, 则 p 是 q 的 ().
 A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要
- 6 设 a, b 是实数, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的 ().
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



根据条件关系求解参数取值范围

- 7 若 “ $x > a$ ” 是 “ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ” 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 ____.
- 8 若 “ $x \geq a$ ” 是 “ $x^2 - x - 2 \geq 0$ ” 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 ____.
- 9 条件 $p: |x - m| \leq 2$, 条件 $q: -1 \leq x \leq n$, 若 p 是 q 的充分条件, 则 n 的最小值为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 10 已知 $p: m - 1 < x < m + 1$, $q: (x - 2)(x - 6) < 0$, 且 q 是 p 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 ____.
- 11 已知不等式 $x^2 - 2mx + m^2 - 4 > 0$ 成立的必要不充分条件是 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$, 则实数 m 的最大值为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 12 已知 $p: x > 1$ 或 $x < -3$, $q: x > a$ (a 为实数), 若 $\neg q$ 的一个充分不必要条件是 $\neg p$, 则实数 a 的取值范围是 ____.



使命题成立的某某条件求解

- 13 不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个必要不充分条件是 ().
 A. $x \geq 0$ B. $x < 0$ 或 $x > 2$ C. $x \leq -\frac{1}{2}$ D. $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$
- 14 关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 的解集为非空集的必要不充分条件是 ().
 A. $a \geq 1$ B. $a \leq 1$ C. $a \leq 2$ D. $a \leq 0$
- 15 使得 “ $a > b$ ” 成立的一个充分不必要条件是 ().
 A. $a > b + 1$ B. $\frac{a}{b} > 1$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$
- 16 已知 $p: x^2 - x < 0$, 那么命题 p 的一个必要不充分条件是 ().
 A. $0 < x < 1$ B. $-1 < x < 1$ C. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2} < x < 2$



全称量词与存在量词及其命题

1. 存在量词及存在量词命题

(1) 存在量词

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号“ $\exists$ ”表示。

(2) 存在量词命题

①定义：含有存在量词的命题，叫做存在量词命题。

②符号表示：存在命题“存在 M 中的元素 x_0 ，使 $p(x_0)$ 成立”

可用符号简记为 $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ，读作“存在 x_0 属于 M ，使 $p(x_0)$ 成立”。

2. 全称量词及全称量词命题

(1) 全称量词

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号“ $\forall$ ”表示。

(2) 全称命题

①定义：含有全称量词的命题，叫做全称命题。

②符号表示：全称命题“对 M 中任意一个 x ，有 $p(x)$ 成立”

可用符号简记为 $\forall x \in M, p(x)$ ，读作“对任意 x 属于 M ，有 $p(x)$ 成立”。

3. 含有一个量词命题的否定

(1) 一般地，对于含有一个量词的**全称命题的否定**，有下面的结论：

全称命题 $p: \forall x \in M, p(x)$ ，

它的否定 $\neg p: \exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$ 。

(2) 一般地，对于含有一个量词的**存在量词命题的否定**，有下面的结论：

存在量词命题 $p: \exists x \in M, p(x)$ ，

它的否定 $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$ 。

4. “一般命题的否定”与“含有一个量词的命题的否定”的辨析

(1) 一般命题的否定：

通常是在条件成立的前提下否定其结论，得到真假性完全相反的两个命题；

(2) 含有一个量词的命题的否定：

是在否定结论的同时，改变量词的属性

即将全称量词改为存在量词，存在量词改为全称量词。



存在量词命题的否定

17 已知命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \leq 0$ ，则 $\neg p$ 为 ()

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} > 0$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$

C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$



18 命题: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ 的否定是 _____.

19 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ” 的否定是: _____.



全称量词命题的否定

20 命题 $p: \forall x \geq 0, x^2 - ax + 3 > 0$, 则 $\neg p$ 为 ().

A. $\forall x < 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$

B. $\exists x \geq 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$

C. $\forall x \geq 0, x^2 - ax + 3 < 0$

D. $\exists x < 0, x^2 - ax + 3 \leq 0$

21 命题 “ $\forall x \in (0, 1), x^2 - x < 0$ ” 的否定是 ().

A. $\exists x_0 \notin (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$

B. $\exists x_0 \in (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$

C. $\forall x_0 \notin (0, 1), x_0^2 - x_0 < 0$

D. $\forall x_0 \in (0, 1), x_0^2 - x_0 \geq 0$

22 已知命题 $p: \forall x, y \in (0, 3), x + y < 6$, 则命题 p 的否定为 ().

A. $\forall x, y \in (0, 3), x + y \geq 6$

B. $\forall x, y \notin (0, 3), x + y \geq 6$

C. $\exists x_0, y_0 \notin (0, 3), x_0 + y_0 \geq 6$

D. $\exists x_0, y_0 \in (0, 3), x_0 + y_0 \geq 6$

23 已知命题 $p: \forall x > 0$, 总有 $(x + 1) \cdot x > 1$, 则 p 的否定为 _____.

第 4 讲

基本不等式





基本不等式的原型及三个基础公式

1. 算术平均数与几何平均数都是啥 (◎_◎)?

对于给定的两个正数 a, b ——

我们把 $\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a, b 的**算术平均数**

把 $\sqrt{ab}$ 叫做正数 a, b 的**几何平均数**.

2. 原型

对于任意实数 a, b , $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

3. 正数形式

如果 a, b 是正数, 那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

此结论又称**均值不等式**或**基本不等式**.

4. 负数形式

如果 a, b 都为负数时, $a + b \leq -2\sqrt{ab}$. 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

5. 常用乘积形式

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

6. 均值不等式需要注意三个方面:

一正二定三相等



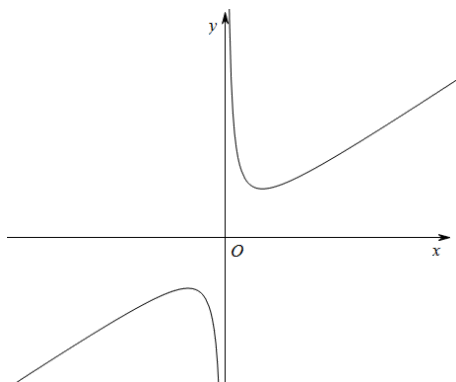
扩展 —— 对勾函数模型

形如 $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ (对勾函数) 模型

① $\{x | x \neq 0\}$

② $y \in (-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$

③ 图像的变化趋势: 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$, $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上单调递增; 在 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 上单调递减





1 看看下面的例子来理解下对勾函数叭!

(1) 求 $y = 3x + \frac{2}{x} (x > 0)$ 最小值

(2) 求 $y = 3x + \frac{2}{x} (x < 0)$ 最大值

(3) 求 $y = 4x + \frac{1}{x} (x \geq 5)$ 最小值

(4) 求 $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{x} (x \leq -2)$ 最大值

(5) 求 $y = -3x - \frac{5}{x} (x > 0)$ 最大值

(6) 求 $y = -x - \frac{1}{7x} + 2 (x \geq 3)$ 最大值



一个参数的均值考查形式



直接套用基本不等式

2 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 _____.

3 若 $x > 0$, 则 $3 - 3x - \frac{1}{2x}$ 有最 _____ 值, 且此最值是 _____.

4 设 $0 < x < 1$, 则函数 $y = x(1 - x)$ 的最大值是 _____.



包罗万象 举一千从 1

5 “ $x + \frac{1}{x} > 2$ ” 是 “ $x > 1$ ” 的 ().

A. 充要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件



配凑法 (加减常数)

6 若 $x > 2$, 则 $x + \frac{1}{x-2}$ 的最小值为 _____.

7 若 $x > -3$, 则函数 $f(x) = x + \frac{2}{x+3}$ 的最小值为 _____.

8 函数 $f(x) = x + \frac{9}{2x-2} (x > 1)$ 的最小值是 _____.

9 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____.

10 $y = 3x^2 + \frac{16}{2+x^2}$ 的最小值为 ()

A. $8 - 2\sqrt{2}$

B. 8

C. $8\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{3} - 6$



豪厘不伐 将用斧柯 1

11 $y = 8x^2 + \frac{16}{2+x^2}$ 的最小值为 _____



分式型 —— 二次比一次

12 已知 $t > 0$, 则函数 $f(t) = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$ 的最小值为 _____.

13 已知 $x > 2$, 则 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$ 的最小值为 _____.

14 函数 $f(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x}$ ($x > 0$) 的最大值为 _____, 此时 x 的值为 _____.



分式型 —— 一次比二次

15 若对任意 $x > 0$, $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.



分式型 —— 二次比二次

16 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$ ($x > 0$) 的最大值为 _____.



两个参数的均值考查形式



直接使用基本不等式

17 已知正数 x, y 满足 $x + y = 18$, 则 xy 的最大值为 _____.

18 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ().

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$



调和形式

【示例】已知 $x + y = m$ ($x, y > 0$), m 为常数, 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ (a, b 为大于 0 的常数) 的最小值.

【解法】采用的是整体代换的思想

19 已知正数 x, y 满足 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $x + 2y$ 的最小值是 ().

A. 18

B. 16

C. 8

D. 10



- 20 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$, 则 $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是 ().
- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 5

- 21 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{x + 8y}{xy}$ 的最小值为 ____.



换元法

- 22 设 x, y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是 ____.



配凑

- 23 已知 $x > y > 0$, 且 $xy = 1$, 求 $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ 的最小值及此时 x, y 的值.

- 24 设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是 ____.

