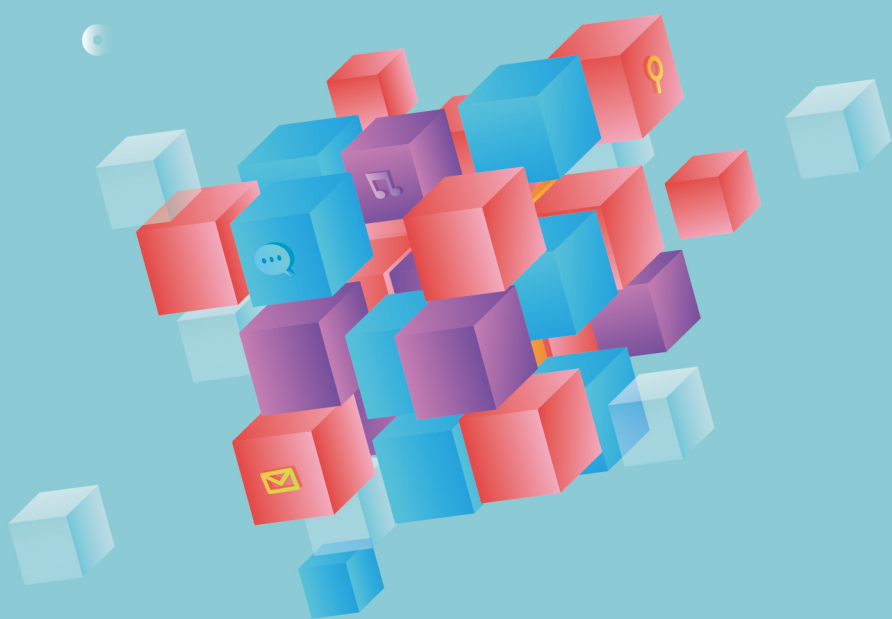


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

恭喜同学们完成了我们暑期的基础课程啦！是不是还意犹未尽呢？如果想要做一些更难更有挑战性的题目，不妨试试我们本模块的【难点攻克】的两讲内容，你会发现这部分的知识较之前所学难度有所加大哟～

完成这两讲难点题后，是不是迫不及待想要了解一下自己的掌握情况呀？最后两讲便是对我们所学知识的一份检测试卷，同学们不妨在业余时间做做看哟～

目 录

第 1 讲 集合至函数难点攻克..... 01

- 知 识 点 1 集合
- 知 识 点 2 充分条件、必要条件
- 知 识 点 3 基本不等式
- 知 识 点 4 函数的三要素

第 2 讲 函数至基本函数难点攻克.....05

- 知 识 点 1 函数的性质
- 知 识 点 2 零点问题
- 知 识 点 3 综合解答问题

第 3 讲 集合至基本不等式阶段测.....09

- 知 识 点 1 选择题
- 知 识 点 2 填空题
- 知 识 点 3 解答题

第 4 讲 函数阶段性测试.....13

- 知 识 点 1 选择题
- 知 识 点 2 填空题
- 知 识 点 3 解答题



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

集合至函数难点攻克





集合



元素的互异性

- 1 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2011} + b^{2012}$ 的值为 ().
- A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1



子集关系

- 2 已知集合 $A = \left\{x \mid x = k + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{N}\right\}$, $B = \left\{x \mid x = \frac{m}{2} - \frac{1}{3}, m \in \mathbf{N}\right\}$, $C = \left\{x \mid x = \frac{n}{2} + \frac{1}{6}, n \in \mathbf{N}\right\}$, 则集合 A, B, C 的关系是 ().
- A. $A \subsetneq C \subsetneq B$ B. $C \subsetneq A \subsetneq B$ C. $A \subsetneq B = C$ D. $A \subsetneq B \subsetneq C$
- 3 集合 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{6, 7\}$, 定义 $P^*Q = \{(a, b) \mid a \in P, b \in Q\}$, 则 P^*Q 的真子集个数为 ().
- A. 31 B. 63 C. 32 D. 64
- 4 满足 $\{1\} \subsetneq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ().
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8



含参集合的交并运算

- 5 已知 $A = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x \mid x \leq a-1 \text{ 或 } x \geq a+1\}$, 若 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $1 \leq a \leq 2$ B. $1 < a < 2$ C. $a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 2$ D. $a < 1 \text{ 或 } a > 2$
- 6 已知集合 $A = \{x \mid x^3 + 3x^2 + 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$, 若 $A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$, $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, 求实数 a, b 的值.
- 7 已知集合 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x \mid 2m-1 \leq x \leq m+1\}$.
- (1) 当 $m = -3$ 时, 求集合 $A \cap B$.
- (2) 当 $B \subseteq A$ 时, 求实数 m 的取值范围.
- 8 设全集 $I = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x + m < 0, m \in \mathbf{R}\}$, $B = \{a \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 4ax - 4 < 0, \text{对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, $(\complement_I A) \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的范围.



充分条件、必要条件

- 9 已知 $p: A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $q: B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 > 0\}$, 若 p 是 q 成立的充分不必要条件, 求 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ B. $(-3, 5)$
C. $[-3, 5]$ D. $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$
- 10 设集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 则 B 是 A 的真子集的一个充分不必要的条件是 ().
- A. $m \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$ B. $m \neq 0$ C. $m \in \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ D. $m \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$
- 11 已知 $p: \frac{1}{x} < 1$, $q: x^2 - 3ax + 2a^2 < 0$ (其中 a 为常数, 且 $a \neq 0$).
若 p 是 q 的必要不充分条件, 求 a 的取值范围.
- 12 已知集合 $A = \{x | 3 - a \leq x \leq 3 + a\}$, $B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$.
若 $a > 0$, 且 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in \complement_{\mathbf{R}} B$ ” 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.



基本不等式



双变量直接均值

- 13 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 ____.
- 14 若 $\log_4(3a + 4b) = \log_2 \sqrt{ab}$, 则 $a + b$ 的最小值是 ____.
- 15 “ $x > 0, y > 0$ ” 是 “ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$ ” 的 ().
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 16 若 $x > 0, y > 0$, 且 $\log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_4 81$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{3y}$ 的最小值为 ____.
- 17 不等式 $x^2 + 2x < \frac{a}{b} + \frac{16b}{a}$ 对任意 $a, b \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是 ().
- A. $(-2, 0)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
C. $(-4, 2)$ D. $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$



函数的三要素



函数的实际应用

- 18 中国“一带一路”战略构思提出后，某科技企业为抓住“一带一路”带来的机遇，决定开发生产一款大型电子设备．生产这种设备的年固定成本为 500 万元，每生产 x 台，需另投入成本 $c(x)$ （万元），当年产量不足 80 台时， $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + 40x$ （万元）；当产量不小于 80 台时， $c(x) = 101x + \frac{8100}{x} - 2180$ （万元）．若每台设备售价为 100 万元，通过市场分析，该企业生产的电子设备能全部售完．

- (1) 求年利润 y （万元）关于年产量 x 台的函数关系式．
- (2) 年产量为多少台时，该企业在这一电子设备的生产中所获利润最大？



相等函数

- 19 下列四组函数，表示同一函数的是（ ）．

A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$

B. $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2}{x}$

C. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$

D. $f(x) = |x+1|$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$



函数的三要素

- 20 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \log_3(4-x)$ 的定义域为 _____ ．
- 21 函数 $y = 2 + \frac{x}{x^2 - 2}$, $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 的值域是 _____ ．

第 2 讲

集合至基本函数难点攻克





函数的性质



比较大小

- 1 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 3^{|x+m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f\left(2^{\frac{1}{3}}\right)$, $b = f\left(\log_{\frac{1}{4}} 3\right)$, $c = f(2m+1)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$



分段函数单调性及求解不等式

- 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x + m, & 0 < x < 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 在定义域内单调递减, 若 $|f(2m)| > f(a)$, 则实数 m 的取值范围是 _____.



根据单调性、奇偶性确定参数取值范围

- 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数.
- (1) 则实数 m 的值为 _____.
- (2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, a-2]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为 _____.



根据单调性、奇偶性求解不等式

- 4 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{2f(x) + f(-x)}{x} < 0$ 的解集是 ().
- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- 5 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(|x - a^2| + |x - 2a^2| - 3a^2)$. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x-2) \leq f(x)$, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$ B. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$



零点问题

- 6 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是 ().
- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(3, 4)$ D. $(4, +\infty)$



- 7 函数 $f(x) = \log_3 x + x^3 - 9$ 的零点所在区间是 ().
 A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
- 8 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \\ |\log_{2019} x|, & x > 0 \end{cases}$, 若存在三个不同实数 a, b, c 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 ().
 A. (0, 1] B. [-2, 0) C. (-2, 0] D. (0, 1)
- 9 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ____.



综合解答题



值域、最值问题

- 10 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$.
- (1) 若不等式 $f(x) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
 - (2) 若 $a > 1$, 且函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[1, a]$, 求实数 a 的值.
 - (3) 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, a+1]$ 的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式.



恒成立问题

- 11 设函数 $f(x) = \log_2(1 + a \cdot 2^x + 4^x)$, 其中 a 为常数.
 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq x - 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
- 12 已知函数 $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 + b$ ($a \neq 0, b < 1$) 在区间 $[2, 3]$ 上有最大值 4, 最小值 1, 设 $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.
- (1) 求 a, b 的值.
 - (2) 不等式 $f(2^x) - k \cdot 2^x \geq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.



13 已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + ax + 2a - 1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $\forall x \in (-2, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.



恒成立 + 零点问题

14 已知函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 2$, 函数 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 和 $[2, +\infty)$ 上单调性相反, 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若 $a < 0$, 不等式 $g(x) \leq 9$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 已知 $a \leq 1$, 若函数 $y = f(x) - \log_2 \frac{x}{8}$ 在 $[1, 2]$ 内有且只有一个零点, 试确定实数 a 的取值范围.

第 3 讲

集合至基本不等式阶段测





计时 60min, 满分 100

Q1: 集合的基本交并补运算

Q2: 命题的否定

Q3: 解不等式

Q4: 充分、必要条件与解不等式

Q5: 集合的子集个数

Q6: 不等式性质

Q7: 含参不等式的恒能成立问题 —— 对应练习题 Q7

Q8: 换元法求解基本不等式

Q9: 集合确定元素的含参问题

Q10: 集合确定元素的含参问题

Q11: 解不等式

Q12: 不等式性质

Q13: 基本不等式 1 的代换

Q14: 含参一元二次不等式的解集问题

Q15: 换元法求解基本不等式

Q16: 集合的含参交并关系 —— 对应练习题 Q16

Q17: 充分、必要条件与解不等式

Q18: 含参不等式的恒能成立问题

Q19: 三个变量的基本不等式



选择题

(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

- 1 (4 分) 设集合 $U = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x \leq 8\}$, $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $T = \{3, 5, 7\}$, 则 $S \cap (\complement_U T) = (\quad)$.
A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
- 2 (4 分) 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$, 则命题 p 的否定是 $(\quad)$.
A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 < 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$
- 3 (4 分) 若 $-2x^2 + 5x - 2 > 0$, 则 $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2|x - 2|$ 等于 $(\quad)$.
A. $4x - 5$ B. -3 C. 3 D. $5 - 4x$
- 4 (4 分) 已知条件 $p: x \leq 1$, 条件, $q: \frac{1}{x} < 1$, 则 $\neg p$ 是 q 的 $(\quad)$.
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



- 5 (4分) 集合 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{6, 7\}$, 定义 $P^*Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 P^*Q 的真子集个数为 ().
A. 31 B. 63 C. 32 D. 64
- 6 (4分) 设 $a > 1 > b > -1$, 则下列不等式中恒成立的是 ().
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a > b^2$ D. $a^2 > 2b$
- 7 (4分) 如果存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得不等式 $\frac{mx^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ().
A. (1, 3) B. $(-\infty, +\infty)$ C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, 3)$
- 8 (4分) 设正实数 x, y 满足 $x > \frac{1}{2}$, $y > 1$, 不等式 $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$ 恒成立, 则 m 的最大值为 ().
A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 16 D. 8



填空题

(本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

- 9 (4分) 已知集合 $A = \{1, 2, m^3\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cap B = B$, 则 $m =$ _____.
- 10 (4分) 若集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 至多有一个元素, 则 a 的取值范围是 _____.
- 11 (4分) 不等式 $\frac{x+1}{2-x} \geq 3$ 的解集是 _____.
- 12 (4分) 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 给出下列不等式:
① $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{ab}$;
② $|a| + b > 0$;
③ $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$;
④ $-ab > -a^2$.
其中错误的 inequality 是 (只填序号) _____.
- 13 (4分) 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为 _____.
- 14 (4分) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则不等式 $-cx^2 + 2x - a > 0$ 的解集为 _____.
- 15 (4分) 已知 $xy > 0$, $x + y = 3$, 则 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+2}$ 的最小值为 _____.



解答题

(本大题共 4 小题, 共 40 分)

16 (10 分) 已知集合 $A = \{x | a - 1 < x < 2a + 3\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 全集 $U = \mathbf{R}$.

(1) (5 分) 当 $a = 2$ 时, 求 $A \cup B$ 及 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

(2) (5 分) 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

17 (10 分) 设集合 $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 关于 x 的不等式 $(x - 2a)(x + a) > 0$ 的解集为 B (其中 $a < 0$).

(1) (5 分) 求集合 B .

(2) (5 分) 设 $p: x \in A$, $q: x \in B$, 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 求 a 的取值范围.

18 (15 分) 已知关于 x 的不等式 $(ax - 1)(x + 1) > 0$.

(1) (5 分) 若此不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$, 求实数 a 的值.

(2) (5 分) 若 $a \in \mathbf{R}$, 解这个关于 x 的不等式.

(3) (5 分) $\forall 1 \leq x \leq 3$, $(ax - 1)(x + 1) > 2ax - a - 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19 (5 分) 正实数 a, b, c 满足 $a^2 - 3ab + 4b^2 - c = 0$, 当 $\frac{ab}{c}$ 取得最大值时, 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}$ 最大值.

第 4 讲

函数阶段性测试





一、选择题

Q1: 函数的定义 —— 图像诠释

Q2: 相同函数

Q3: 函数图像选择

Q4: 比较大小

Q5: 复合函数定义域

Q6: 幂函数的单调性

Q7: 零点存在性

Q8: 根据函数单调性、奇偶性求解不等式

Q9: 对数运算、二元一次方程的根

Q10: 函数的最值、奇偶性

二、填空题

Q11: 过定点

Q12: 利用函数奇偶性进行赋值运算

Q13: 指数函数的单调性

Q14: 零点问题

Q15: 分段函数零点个数

三、解答题

Q16: 对数运算

Q17: 利用函数奇偶性求解解析式；求解分段函数值域

Q18: 复合函数奇偶性的判断；复合函数单调性的证明

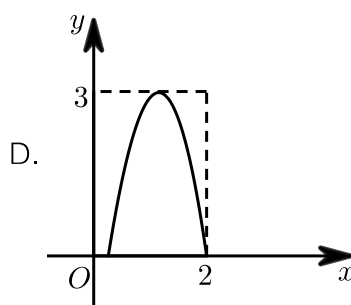
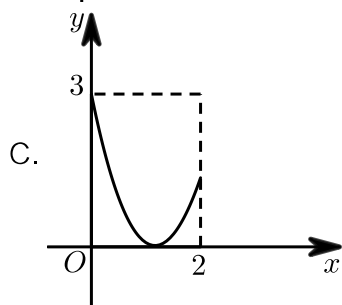
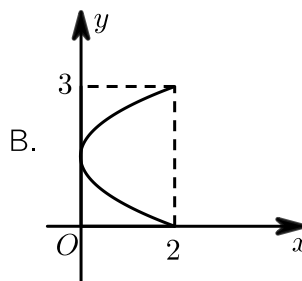
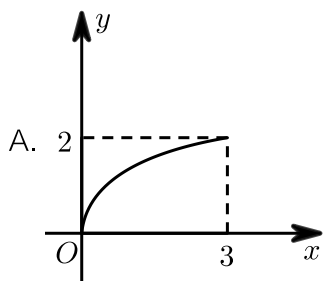
Q19: 含参一元二次方程根的分布；一元二次函数的最值问题

Q20: 借助函数奇偶性判断函数单调性；根据函数的奇偶性、单调性求解不等式



选择题 (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

- 1 (4 分) 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$, 给出下列图形, 其中能表示从集合 M 到 N 的一个函数的是 ().



- 2 (4 分) 下列各组函数中, 表示同一函数的是 ().

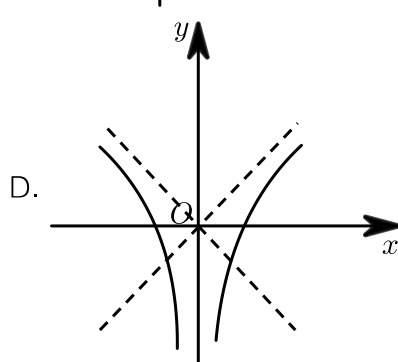
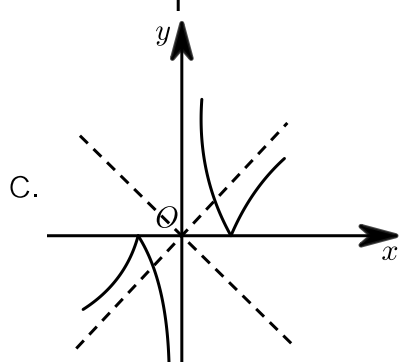
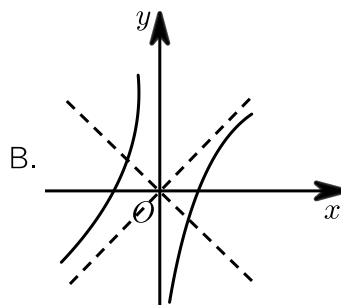
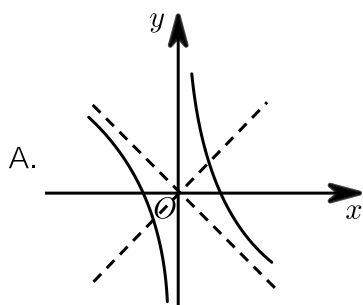
A. $f(x) = 1$, $g(x) = x^0$

B. $y = e^{\ln x}$, $y = \ln e^x$

C. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $y = \sqrt{x^2-1}$

D. $y = |x|$, $y = \sqrt{x^2}$

- 3 (4 分) 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的图象为 ().





- 4 (4分) 设 $a = \log_{0.7} 0.8$, $b = \log_{1.1} 0.9$, $c = 1.1^{0.9}$, 则 a 、 b 、 c 的大小顺序是 ().
A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
- 5 (4分) 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.6}(2-x)}$ 的定义域为 ().
A. $[1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 2)$
- 6 (4分) 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(-2, 4)$, 那么函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 ().
A. $(-\infty, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$
- 7 (4分) 函数 $f(x) = 2^x + x$ 的零点所在的一个区间是 ().
A. $(1, 2)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-2, -1)$
- 8 (4分) 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足条件 $f(2x+1) < f(5)$ 的 x 的取值范围是 ().
A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-2, 2)$ D. $[-3, 2]$
- 9 (4分) 已知 $\lg a$, $\lg b$ 是方程 $6x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根, 则 $\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2$ 等于 ().
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{13}{9}$ C. $\frac{14}{9}$ D. $\frac{22}{9}$
- 10 (4分) 已知 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x + 1$, 若当 $x \in [1, 4]$ 时, $a \leq f(x) \leq b$ 恒成立, 则 $b - a$ 的最小值为 ().
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



填空题 (本大题共)

- 11 (4分) 函数 $g(x) = \frac{1}{3}a^{2x+1} - 2$ 过定点 ____.
- 12 (4分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数, 若当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(-7) =$ ____.
- 13 (4分) 若指数函数 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ ($a > 0$) 是减函数, 则实数 a 的取值范围是 ____.
- 14 (4分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1}, & 0 \leq x < 1 \\ |x-3| - 1, & x \geq 1 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{e}$ ($e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数) 的所有零点之和为 ____.
- 15 (4分) 函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2| - 1, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点的个数是 ____.



解答题 (共 54)

16 (8分) 化简或求值:

(1) (4分) $(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3}$.

(2) (4分) $\lg 500 + \lg \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \lg 64 + 50(\lg 2 + \lg 5)^2$.

17 (8分) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $y = x$; 当 $x > 2$ 时, $y = f(x)$ 的图像是顶点在 $P(4, 3)$, 且过点 $A(2, 2)$ 的抛物线的一部分.

(1) (4分) 求函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上的解析式.

(2) (4分) 求函数 $f(x)$, $x \in (-4, 2)$ 的值域.

18 (8分) 设 $f(x) = \frac{x(1-2^x)}{1+2^x}$.

(1) (4分) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) (4分) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调性.

19 (8分) 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + m+1 = 0$ 的两个实根, 又 $f(m) = x_1^2 + x_2^2$.

(1) (4分) 求函数 $f(m)$ 的解析式.

(2) (4分) 求此函数的最小值.

20 (8分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且对于任意的 $a, b \in [-1, 1]$, 当 $a+b \neq 0$ 时, 都有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} < 0$.

(1) (4分) 求证: $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是减函数.

(2) (4分) 解不等式 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right) < 0$.

