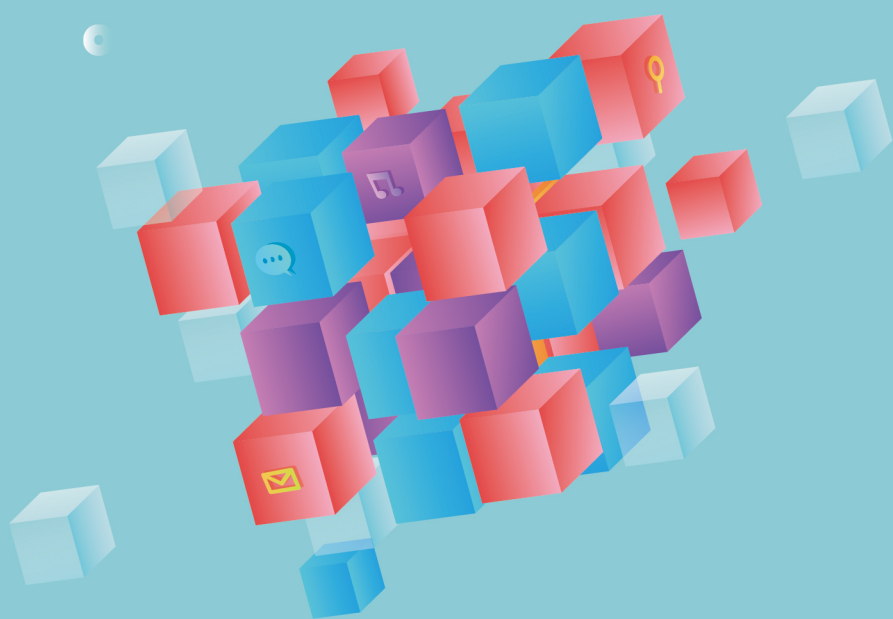


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

闫聪聪

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

恭喜同学们完成了我们暑期的基础课程啦！是不是还意犹未尽呢？如果想要做一些更难更有挑战性的题目，不妨试试我们本模块的【难点攻克】的两讲内容，你会发现这部分的知识较之前所学难度有所加大哟～

完成这两讲难点题后，是不是迫不及待想要了解一下自己的掌握情况呀？最后两讲便是对我们所学知识的一份检测试卷，同学们不妨在业余时间做做看哟～

目 录

第 1 讲 集合至函数难点攻克..... 01

第 2 讲 函数至基本函数难点攻克.....05

第 3 讲 集合至基本不等式阶段测.....09

第 4 讲 函数阶段性测试.....13



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

集合至函数难点攻克





集合

- 1 若 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 则 $a =$ _____.
- 2 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 12 \leq 0\}$, $B = \{x | 2m-1 < x < m+1\}$, 且 $A \cap B = B$, 则实数 m 的取值范围为 ().
- A. $[-1, 2)$ B. $[-1, 3]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[-1, +\infty)$
- 3 已知关于 x 的不等式 $x^2 - x + a - a^2 \leq 0$.
- (1) 求不等式的解集 A .
- (2) 已知集合 $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 若 $a > \frac{1}{2}$, $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.



充分条件、必要条件

- 4 已知 $p: \frac{1}{x-2} \geq 1$, $q: |x-a| < 1$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $(-\infty, 3]$ B. $[2, 3]$ C. $(2, 3]$ D. $(2, 3)$
- 5 命题 $A: |x-1| < 3$, 命题 $B: (x+2)(x+a) < 0$; 若 A 是 B 的充分而不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 _____.



基本不等式

- 6 设 a, b 为实数, 且 $a+b=3$, 则 $2^a + 2^b$ 的最小值是 ().
- A. 6 B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$
- 7 “ $a, b > 0$ 且 $a \neq b$ ” 是 “ $ab < \frac{a^2+b^2}{2}$ ” 的 ().
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 8 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 若 $x+2y > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ B. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$
- C. $(-2, 4)$ D. $(-4, 2)$
- 9 已知 $x > 1, y > 1$, 且 $\lg x \cdot \lg y = 1$, 则 xy 的最小值为 ().
- A. 100 B. 10 C. 1 D. $\frac{1}{10}$



函数三要素

- 10 为保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”，计费方法如下表：

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3 的部分	3 元 / m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3 的部分	6 元 / m^3
超过 18m^3 的部分	9 元 / m^3

设某户居民本月实际用水量为 x (单位: m^3)，应交纳水费为 y (单位: 元)。

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式。

(2) 若某户居民本月交纳的水费为 48 元，求此户居民本月用水量。

- 11 函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$ 的定义域是 ()。

A. $(-1, +\infty)$

B. $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-1, 2)$

D. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

- 12 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的值域为 _____。

第 2 讲

集合至基本函数难点攻克





函数的性质

- 1 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 设 $a = f(\log_4 7)$, $b = f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$, $c = f(0.2^{0.6})$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < b < c$
- 2 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 _____.
- 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2), & x \geq 1 \\ 2^{ax-1}, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围为 ().
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
- 4 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2b, 1+b]$ 上的偶函数, 且在 $[-2b, 0]$ 上为增函数, 则 $f(x-1) \leq f(2x)$ 的解集为 ().
- A. $[-1, \frac{2}{3}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[\frac{1}{3}, 1]$ D. $[-1, \frac{1}{3}]$
- 5 已知 $f(x)$ 的定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = 2x - x^2$.
- (1) 求 $f(x)$ 的表达式.
- (2) 设 $0 < a < b$, 当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$, 求 a, b 的值.
- 6 函数 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 a 的值是 _____.



零点问题

- 7 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是 ().
- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(3, 4)$ D. $(4, +\infty)$
- 8 $f(x) = \log_2 x + x - 5$ 的零点所在区间为 ().
- A. $(1, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(3, 4)$ D. $(4, 5)$



综合解答题

- 9 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 满足条件 $f(0) = 0$ 和 $f(x+2) - f(x) = 4x$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.
- (2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2kx + 2$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 求函数 $g(x)$ 的最小值.



- 10 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^x + 1}$ 是奇函数.
- (1) 求实数 a 的值.
 - (2) 判断 $f(x)$ 的单调性并用定义证明.
 - (3) 已知不等式 $f\left(\log_m \frac{3}{4}\right) + f(-1) > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

- 11 已知函数 $y = mx^2 - mx - 1$.
- (1) 若 $y < 0$ 时, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.
 - (2) 求关于 x 的不等式 $y < (-2m - 2)x - 3x^2$ 的解集.

- 12 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), $f(-2) = f(0) = 0$, $f(x)$ 的最小值为 -1 .
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.
 - (2) 设 $g(x) = f(-x) - \lambda f(x) + 1$.
 - ① 若 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是减函数, 求实数 λ 的取值范围.
 - ② 若 $g(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内恰有一个零点, 求实数 λ 的取值范围.



第 3 讲

集合至基本不等式阶段测





满分 100, 计时 60min

- Q1: 集合的基本交并补运算
Q2: 不等式性质
Q3: 集合代表元素的确定
Q4: 命题的否定
Q5: 子集关系
Q6: 充分、必要条件与解不等式
Q7: 含参不等式的恒能成立问题
Q8: 基本不等式的实际应用
Q9: 集合确定元素的含参问题
Q10: 集合的子集关系
Q11: 直接使用基本不等式
Q12: 集合的运算
Q13: 不等式性质与充分、必要条件
Q14: 含参一元二次不等式的解集问题
Q15: 解不等式
Q16: 集合的含参交并关系
Q17: 基本不等式 1 的代换
Q18: 充分、必要条件与解含参不等式



选择题

(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

- 1 (4 分) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{3, 6\}$, 则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于 ().
A. $\emptyset$ B. $\{2, 4, 7, 8\}$ C. $\{1, 3, 5, 6\}$ D. $\{2, 4, 6, 8\}$
- 2 (4 分) 若 $x > y$, $m > n$, 则下列不等式正确的是 ().
A. $x - m > y - n$ B. $xm > yn$ C. $\frac{x}{n} > \frac{y}{m}$ D. $m - y > n - x$
- 3 (4 分) 集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则集合 $M \cap N$ 为 ().
A. $\{3, -1\}$ B. $(3, -1)$ C. $\{(3, -1)\}$ D. $\{x = 3, y = -1\}$
- 4 (4 分) 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ().
A. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ C. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$
- 5 (4 分) 已知 $\{1\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



- 6 (4分) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $1 < x < 2$ 是 $|x - 2| < 1$ 的 ().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要
- 7 (4分) 若不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 ().
A. $-2 < m < 2$ B. $-2 < m \leq 2$ C. $m < -2$ 或 $m \geq 2$ D. $m < 2$
- 8 (4分) 要制作一个容积为 4m^3 , 高为 1m 的无盖长方体容器, 已知容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是 ().
A. 80 元 B. 120 元 C. 160 元 D. 240 元



填空题

(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

- 9 (4分) 设集合 $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{a + 2, a^2 + 4\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____.
- 10 (4分) 若集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为 _____.
- 11 (4分) 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 _____.
- 12 (4分) 集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 中所有元素之积为 _____.
- 13 (4分) 下列命题:
① “ $x > 2$ 且 $y > 3$ ” 是 “ $x + y > 5$ ” 的充要条件;
② “ $b^2 - 4ac < 0$ ” 是 “不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为 $\mathbf{R}$ ” 的充要条件;
③ “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的充要条件;
④ 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的充分不必要条件.
其中真命题的序号为 _____.
- 14 (4分) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + a^2 - 1 \leq 0$ 的解集为 $[-1, +\infty)$, 则实数 $a + b$ 的值为 _____.



解答题

(本大题共 4 小题, 共 44 分)

- 15 (14分) 解不等式:
(1) (4分) $(x + 2)(x - 4) > 4$.
(2) (5分) $\frac{2x - 5}{x - 3} \geq 4$.
(3) (5分) $2 \leq |2x - 4| \leq 5$.



16 (10分) 已知集合 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \mid 2m - 1 \leq x \leq m + 1\}$.

- (1) (4分) 当 $m = -3$ 时, 求 $A \cap B$.
(2) (6分) 当 $B \subseteq A$ 时, 求实数 m 的取值范围的集合.

17 (8分) 解答下列各题:

- (1) (4分) 已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x - 5}$ 的最大值.
(2) (4分) 已知 $x > 0$, $y > 0$, $2x + 5y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

18 (12分) 已知 $p: \frac{x-5}{x-2} < 0$, $q: x^2 - 4mx + 3m^2 < 0$, 其中 $m > 0$.

- (1) (6分) 已知 $m = 1$, 求 p 与 q 对应不等式的解集.
(2) (6分) 若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

第 4 讲

函数阶段性测试





一、选择题

Q1: 函数的定义 —— 图像诠释

Q2: 相等函数

Q3: 函数图像的选择

Q4: 比较大小

Q5: 根据对数函数特点求解参数取值范围

Q6: 复合函数奇偶性的判断

Q7: 复合函数的值域

Q8: 零点存在性

Q9: 根据函数单调性、奇偶性求解不等式

Q10: 分段函数的单调性

二、填空题

Q11: 复合函数的定义域

Q12: 对数运算

Q13: 函数过定点问题

Q14: 绝对值型函数的最值

Q15: 分段函数赋值运算

三、解答题

Q16: 赋值运算; 求解函数的定义域、值域

Q17: 奇函数的性质; 根据函数的奇偶性确定参数值

Q18: 分段函数单调性及图像; 含参函数零点个数

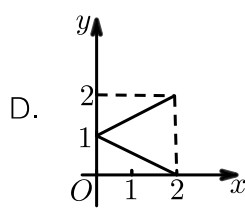
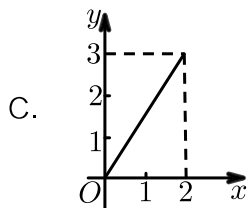
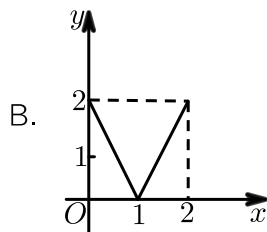
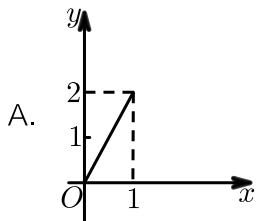
Q19: 含参一元二次函数单调性的讨论; 求解复合函数的值域

Q20: 求解复合函数的定义域; 判断复合函数的奇偶性; 求解对数型不等式



选择题 (共 10 题, 共 40 分)

- 1 (4 分) 设 $M = \{x|0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y|0 \leq y \leq 2\}$ 给出下列四个图形, 其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的是 ().





2 (4分) 下列函数中, 与函数 $y = x$ 相等的是 ().

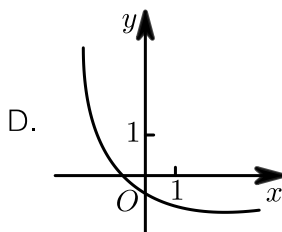
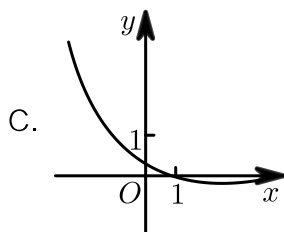
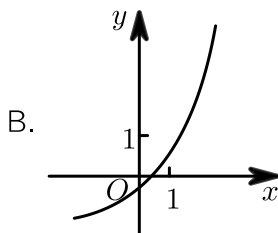
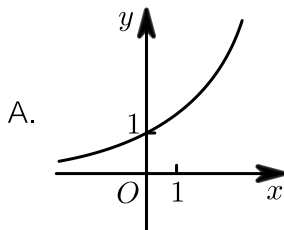
A. $y = (\sqrt{x})^2$

B. $y = \sqrt[3]{x^3}$

C. $y = \sqrt{x^2}$

D. $y = \frac{x^2}{x}$

3 (4分) 函数 $f(x) = a^x - a (a > 0, a \neq 1)$ 的图象可能是 ().



4 (4分) 三个数 $5^{0.6}$, 0.6^5 , $\log_{0.6} 5$ 的大小顺序是 ().

A. $0.6^5 < \log_{0.6} 5 < 5^{0.6}$

B. $0.6^5 < 5^{0.6} < \log_{0.6} 5$

C. $\log_{0.6} 5 < 0.6^5 < 5^{0.6}$

D. $\log_{0.6} 5 < 5^{0.6} < 0.6^5$

5 (4分) 在 $b = \log_{(a-2)}(5-a)$ 中, 实数 a 的取值范围是 ().

A. $a > 5$ 或 $a < 2$

B. $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$

C. $2 < a < 5$

D. $3 < a < 4$

6 (4分) 函数 $y = \sqrt{1-x^2} + \frac{9}{1+|x|}$ 是 ().

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

7 (4分) 函数 $y = \frac{2x-1}{x-2}$, $x \in (-\infty, 0)$ 的值域是 ().

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, \frac{1}{2})$

C. $(0, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, 2)$

8 (4分) 函数 $f(x) = \ln x - \frac{3}{e}$ 的零点所在区间为 ().

A. $(\frac{1}{e}, 1)$

B. $(1, e)$

C. (e, e^2)

D. (e^2, e^3)

9 (4分) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 则下列关系正确的是 ().

A. $f(-2) > f(a^2 - 4a + 6) (a \in \mathbf{R})$

B. $f(-2) < f(a^2 - 4a + 6) (a \in \mathbf{R})$

C. $f(-2) \geq f(a^2 - 4a + 6) (a \in \mathbf{R})$

D. $f(-2) \leq f(a^2 - 4a + 6) (a \in \mathbf{R})$



- 10 (4分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $-3 \leq a < 0$ B. $-3 \leq a \leq -2$ C. $a \leq -2$ D. $a < 0$



填空题 (共 5 题, 共 20 分)

- 11 (4分) 计算 $\log_2 5 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 12 (4分) 函数 $f(x) = \sqrt{1-x} + \lg(x+1)$ 的定义域 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 13 (4分) 不论 $a(a > 0, a \neq 1)$ 为何值, 函数 $f(x) = a^{x-3} - 1$ 的图象一定经过点 P , 则点 P 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 14 (4分) 函数 $y = |x+2| + |x-3|$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 15 (4分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = 15$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.



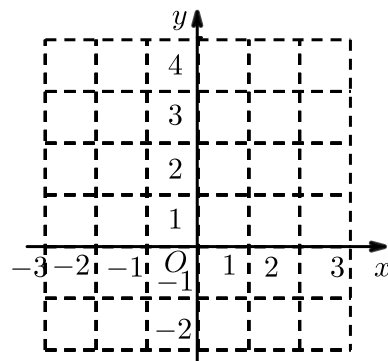
解答题 (共 5 题, 共 40 分)

- 16 (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$.
- (1) (2分) 求 $f(2)$ 的值.
- (2) (3分) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.
- 17 (5分) 已知 $f(x) = \frac{(x-3)(x+a)}{x}$ 为奇函数.
- (1) (2分) 求 $f(-3)$ 的值
- (2) (3分) 求实数 a 的值.



18 (0分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x|$.

(1) (5分) 在所给坐标系中, 画出函数 $f(x)$ 的图象, 并写出 $f(x)$ 的单调递增区间.



(2) (5分) 若函数 $g(x) = f(x) + 3a - 1$ 有 4 个零点, 求 a 的取值范围.

19 (9分) 已知函数 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + 2ax$.

(1) (4分) 若 $g(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.

(2) (5分) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $y = f[g(x)]$ 的值域.

20 (11分) 已知函数 $f(x) = \log_a(3 + 2x)$, $g(x) = \log_a(3 - 2x)$, ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) (3分) 求函数 $f(x) - g(x)$ 定义域.

(2) (4分) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明.

(3) (4分) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

