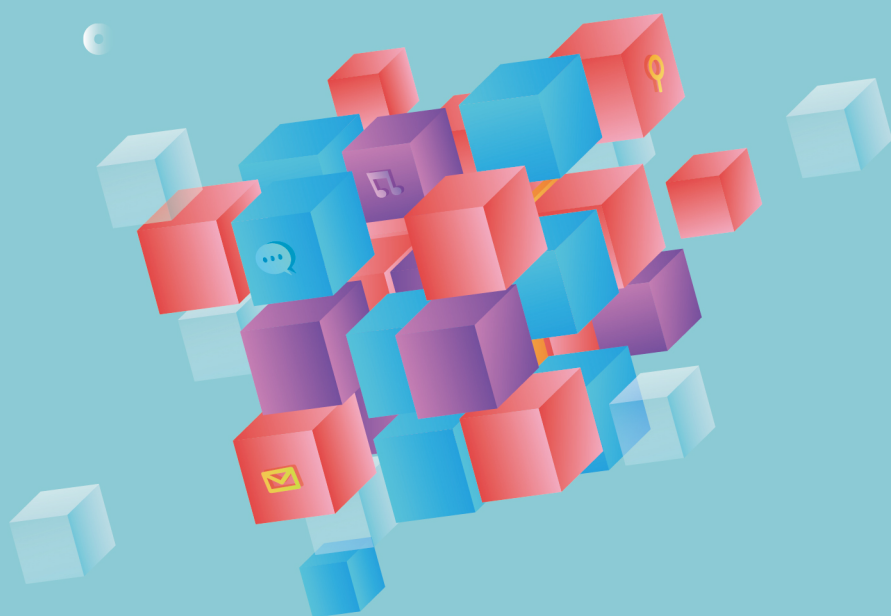


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 严立

封 面 设 计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

本模块内容作为初高衔接课程，主要目的是帮助学生应用初中所学的等式关系及部分不等式内容类推并熟悉高中相近的知识点，帮助学生培养数学兴趣。在这一模块，同学们应熟悉并掌握不等式的性质并能对常见不等式——诸如一元二次不等式、分式不等式、绝对值不等式、高次不等式进行求解。在这讲中，不等式的性质和解不等式都是基础，需要同学们牢牢掌握。此处一般不会单独命题，而是多与函数、数列以及平面解析几何结合出综合题，题型变化多样，几乎很多题目最后都要解不等式，希望同学们能把解不等式做到融会贯通。

目 录

第 1 讲 初高衔接之不等式一..... 01

- 知 识 点 1 不等关系与不等式
- 知 识 点 2 实数大小比较的依据
- 知 识 点 3 不等式的性质
- 知 识 点 4 比较数（式）的大小的方法
- 知 识 点 5 一元二次不等式
- 知 识 点 6 分式不等式

第 2 讲 初高衔接之不等式二.....09

- 知 识 点 1 绝对值不等式
- 知 识 点 2 高次不等式
- 知 识 点 3 无理不等式



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

初高衔接之不等式一





不等关系与不等式

1. 不等式的定义

用不等号 ($<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 、 $\neq$) 表示不等关系的式子叫**不等式**

用 “ $<$ ” 或 “ $>$ ” 连接的等式叫**严格不等式**

用 “ $\leq$ ” 或 “ $\geq$ ” 连接的不等式叫**非严格不等式**.

2. 用不等式表示不等关系

常见的文字语言转化为数学语言的对应关系

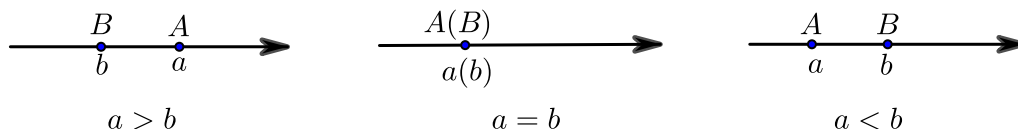
文字语言	数学符号	文字语言	数学符号
大于		至多	
小于		至少	
大于 或 等于		不少于	
小于 或 等于		不多于	



实数大小比较的依据

1. 利用数轴表示两实数大小

在数轴上，点 A 与点 B 分别表示实数 a 与 b



2. 关于实数大小的比较的事实

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$



不等式的性质

1. 不等式的基本性质

	别名	性质内容	注意
性质 1	对称性	$a > b \Leftrightarrow b < a$ $a < b \Leftrightarrow b > a$	可逆
性质 2	传递性	$a > b, b > c \Rightarrow a > c$ $c < b, b < a \Rightarrow c < a$	同向
性质 3	可加性	$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$	可逆
性质 3 的推论	移项法则	$a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$	可逆
性质 4	可乘性	$\left. \begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bc$	c 的符号
		$\left. \begin{matrix} a > b \\ c < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac < bc$	
性质 5	同向可加性	$\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$	同向
性质 6	同向同正可乘性	$\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$	同向, 同正
性质 7	可乘方性	$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)	同正
性质 8	可开方性	$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	

2. 不等式的其他性质 —— 倒数性质

- ① $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
 ② $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.



比较数 (式) 的大小的方法

	作差法	作商法
依据	$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$; $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$; $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$	$b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$, $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$, $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$; $b < 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a < b$, $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$, $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a > b$;



一元二次不等式



已因式分解

1 $(x - 7)(x + 6) > 0.$

2 解下列关于 x 的不等式:
 $(5 - x)(x + 1) \geq 0.$



可因式分解

3 $x^2 - 2x - 8 < 0.$

4 $-x^2 + 2x + 8 < 0.$

5 $(x + 2)(x - 3) > 6.$

6 $(x - 1)(x + 2) \geq (x - 2)(2x + 1).$



完全平方

7 $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

8 $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$.

9 解下列一元二次不等式:
 $x^2 - 4x + 4 > 0$.



不可因式分解

10 $x^2 - x + 2 < 0$.

11 $x^2 - 3x - 1 > 0$.

12 $2x^2 + 4x + 5 > 0$.



分式不等式

求解步骤及注意事项

- ①. 移项（保证不等号**右边为零**）
- ②. 通分
- ③. **化分式为整式**
- ④. **注意使分母为零的值是不能取的**



直接分式化整式

13 $\frac{1}{x} < 1.$

14 $\frac{1}{x+2} \leq 3.$

15 如何解不等式 $\frac{x+1}{3x-2} > 0.$



需要移项通分

16 $\frac{1}{2x-1} \leq 1.$

17 不等式 $\frac{3}{5-3x} > 1$ 的解集是 _____.



18 $\frac{2x+1}{x-3} < 1.$

19 $\frac{2x}{x-2} \leq 1.$

20 解不等式 $\frac{2x-1}{x+3} \geq 1.$

21 $\frac{x-4}{3-x} \geq 1.$

22 $\frac{-3x+4}{x-1} \geq 2.$

第 2 讲

初高衔接之不等式二





绝对值不等式

绝对值不等式的解法

- ①公式法
- ②平方法
- ③分情况讨论法



公式法

1 $|3x + 5| > 1$.

2 如何解不等式 $|2x - 1| < 4$

3 $|x^2 - 3| > 2x$.

4 不等式 $|2x - 1| - x < 1$ 的解是 _____.



平方法

5 解不等式: $|x - 1| < |x - 3|$.

6 $2|x| > |x - 1|$.



分情况讨论法

7 不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$ 的解集为 _____.

8 $|x - 2| + |2x - 3| < 4$.

9 $|x + 1| - |2x - 1| > 1$.

10 设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $2|x + 1| + |x| < 4$.



高次不等式

1. 概念

最高次项的次数高于二次的不等式称为**高次不等式**

2. 一元高次不等式的解法

数轴穿根法 (又称**穿针引线法**)

其一般步骤是:

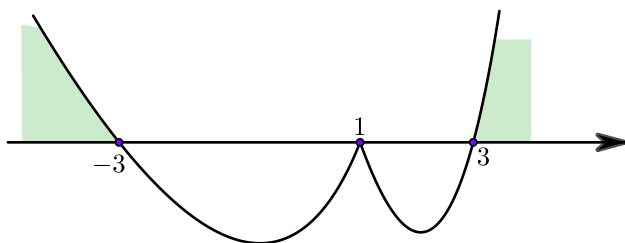
- ①化形: 将不等式化为一端为 0, 另一端为一次因式或二次不可约因式的**积**的形式, 并使**每个因式最高次项的系数为正**;
- ②求根, 标根: 求出各因式对应方程的根, 并在数轴上从小到大依次标出, 注意**点的虚实**;
- ③画曲线: 从数轴的**最右端上方**起, 自右至左依次经过各个点 (根) 画曲线, 注意**遇奇次重根穿过数轴, 遇偶次重根不过**;
- ④写解集: 记数轴上方为正, 下方为负, 根据不等号的方向, 写出不等式的解集.

3. 举例

解不等式 $(x^2 + 2x - 3)(x - 1)(-8x + 24) \leq 0$ 时

原不等式等价于 $(x + 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$, 相应方程的根为 $-3, 1, 3$,

其中 1 为二次重根. 把各根在数轴上标出来, 如图, 由图可得原不等式的解集为 $(-\infty, -3] \cup 1 \cup [3, +\infty)$.





整式型 —— 已因式分解

11 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) > 0$ (直接求解) .

12 $(x+2)(x+3)^2(x-1)^3 \leq 0$ (非严格不等号的处理) .

13 $-x(x+2)(x-4) > 0$ (调整最高次项符号) .

14 $(x+4)(x+5)^2(2-x)^3 < 0$ (系数符号处理, 指数奇偶判断) .

15 $(x-1)(x^2-x+1) > 0$ (恒正因式处理) .



整式型 —— 未因式分解

16 $15x + x^2 - 2x^3 < 0$.



17 $(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \leq 0.$

18 $x^3 + x^2 - 3x - 3 > 0.$

19 $x^4 + 8x^2 - 9 < 0.$



分式型 —— 已因式分解

20 $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2.$

21 $\frac{(-3x-3)(2x-2)}{x+5} \leq 0.$



分式型 —— 未因式分解

22 不等式 $\frac{x^2 - 16}{x - 1} \geq 0$ 的解集是 _____.

23 $\frac{7x-2}{x+4} \geq x.$



24 $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 2} \leq x.$



无理不等式

无理不等式求解依据

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ (2) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases} \end{aligned}$$



根号式大于或大于等于右侧式

25 不等式 $\sqrt{x+1} > x-1$ 的解为 _____.

26 $\sqrt{x^2 - 4x} \geq x.$

27 $\sqrt{x^2 + 3x - 4} > x + 1$



根号式小于或小于等于右侧式

28 不等式 $\sqrt{x-1} < 2x-8$ 的解集是 _____.

29 解不等式 $\sqrt{2x^2 + 1} - x \leq 1.$



两边根号式

30 解不等式 $\sqrt{3x-4} - \sqrt{x-3} > 0$.

31 $\sqrt{10-2x} - \sqrt{x-2} > 0$

32 $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x-1} > 0$.

