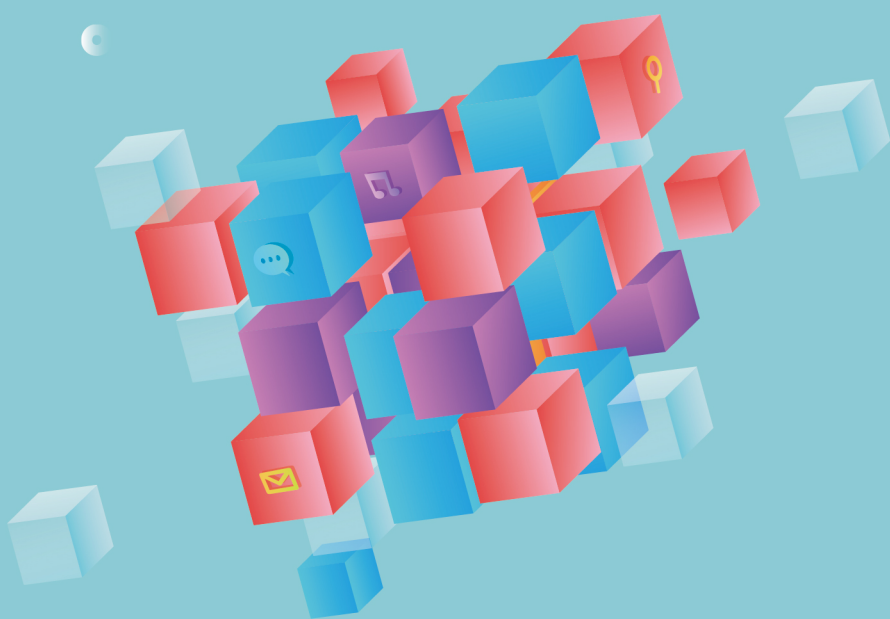


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳 闫聪聪

封 面 设 计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

在本模块中，我们会结合前面学习的相关函数知识，理解有理数指数幂的含义，了解幂函数及指数运算，能够利用分式指数幂与根式的互化解决化简和求值问题，并由此引申出指数函数的概念并掌握指数函数的图象与性质。同时也要充分掌握能利用指数函数的单调性比较幂的大小。

而在以上知识掌握扎实后，我们将引入对数的概念，并学会熟练地进行对数式与指数式的互化，与此同时，掌握对数的运算性质，并能够利用其进行对数运算。通过此处内容理解对数函数的概念并掌握对数函数的图象与性质。

目 录

第 1 讲 幂函数以及二次函数..... 01

- 知 识 点 1 幂函数的相关概念
- 知 识 点 2 幂函数常见题型
- 知 识 点 3 二次函数
- 知 识 点 4 恒能成立问题的讨论

第 2 讲 指数运算与指数函数.....09

- 知 识 点 1 指数运算的概念及运算公式
- 知 识 点 2 指数运算典型例题
- 知 识 点 3 指数函数的图像与性质
- 知 识 点 4 指数函数综合问题

第 3 讲 对数运算与对数函数 1.....17

- 知 识 点 1 对数运算
- 知 识 点 2 对数函数的图像与性质

第 4 讲 对数函数 2 及基本初等函数综合.....25

- 知 识 点 1 对数函数综合问题
- 知 识 点 2 基本初等函数综合



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

幂函数以及二次函数





幂函数的相关概念

1. 幂函数的定义

一般地, $y = x^a$ 叫做幂函数, 其中 x 是自变量, a 是常数.



判断是否幂函数

1 下面的函数中是幂函数的是 ().

① $y = x^2 + 2$ ② $y = x^{\frac{1}{2}}$ ③ $y = 2x^3$ ④ $y = x^{\frac{3}{4}}$ ⑤ $y = x^{\frac{1}{3}} + 1$

A. ①⑤

B. ②④

C. ①②③

D. ②③⑤



利用幂函数定义求解析式

2 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则 $a =$ ____.

3 幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(3, \sqrt{3})$, 则 $f(x)$ 的解析式是 ____.

4 幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{8})$, 则 $f(\frac{1}{3}) =$ ____.

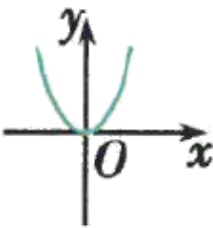
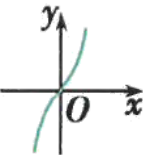
2. 幂函数的图像

动手试试看~

在同一平面直角坐标系内作出幂函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-1}$ 的图象



3. 借助图像观察幂函数的特征

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					



幂函数的奇偶性、单调性

- 5 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{2m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 m 值为 ().
A. 4 B. 3 C. -1 D. -1 或 4
- 6 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^m$ 的图象关于 y 轴对称, 则实数 $m =$ _____.
- 7 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3) \cdot x^{m+1}$ 为奇函数, 实数 m 的值为 _____.
- 8 幂函数 $f(x) = x^{m^2-3m}$ 的图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则整数 $m =$ _____.
- 9 若幂函数 $y = (m^2 - 3m + 3)x^{m^2-m-2}$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数, 则实数 $m =$ _____.

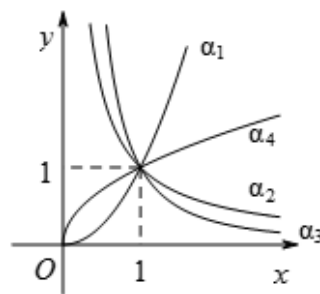


幂函数常见题型



与幂函数图像有关的问题

1. 依据图像高低判断幂指数大小:
- ①在 $(0, 1)$ 上, 指数越大, 幂函数图像越靠近 x 轴;
②在 $(1, +\infty)$ 上, 指数越大, 幂函数图像越远离 x 轴.
2. 定点与凹凸性:
- ①当 $\alpha > 0$ 时, 幂函数的图像都经过 _____ 点,
在第一象限内, 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 曲线 _____; 当 $\alpha > 1$ 时, 曲线 _____;
②当 $\alpha < 0$ 时, 幂函数的图像都经过 _____ 点,
在第一象限内, 曲线 _____.
- 10 下图为幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限的图象, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 按由大到小的顺序排列为 _____.



利用幂函数解不等式

- 11 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 $x^3 < 1$ 的 ().
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



12 若 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, 则不等式 $f(x) > f(8x - 16)$ 的解集是 ().

- A. $(-\infty, \frac{16}{7}]$ B. $(0, 2]$ C. $[2, \frac{16}{7})$ D. $[2, +\infty)$

13 若 $(a+1)^{-\frac{1}{2}} < (3-2a)^{-\frac{1}{2}}$, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ B. $(\frac{2}{3}, 2)$ C. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$



二次函数

1. 二次函数图像及对应一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

2. 韦达定理

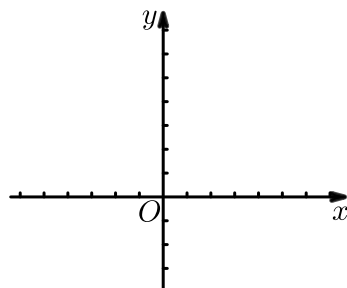
设 x_1, x_2 , 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根, 则_____



画图判断函数性质

14 已知函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$, $x \in \mathbf{R}$.

- 判断函数的奇偶性并将函数写成分段函数的形式.
- 画出函数的图象.
- 根据图象写出它的单调区间及值域.





最值问题

15 函数 $f(x) = 2x^2 - 2ax + 3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上最小值即为 $g(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的函数表达式.

(2) 求 $g(a)$ 的最大值.



实际应用

16 因新冠肺炎疫情影响，呼吸机成为紧缺商品，某呼吸机生产企业为了提高产品的产量，投入 90 万元安装了一台新设备，并立即进行生产. 预计使用该设备前 $n(n \in \mathbf{N})$ 年的材料费、维修费、人工工资等共为 $\left(\frac{5}{2}n^2 + 5n\right)$ 万元，每年的销售收入 55 万元，设使用该设备前 n 年的总盈利额为 $f(n)$ 万元.

(1) 写出 $f(n)$ 关于 n 的函数关系式，并估计该设备从第几年开始盈利.

(2) 使用若干年后，对该设备处理的方案有两种：

方案一：当总盈利额达到最大值时，该设备以 10 万元的价格处理；

方案二：当年平均盈利额达到最大值时，该设备以 50 万元的价格处理.

问哪种方案处理较为合理？并说明理由.



根的分佈

17 函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$.

- (1) 若 $f(x)$ 有且只有一个零点, 求 m 的值.
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点且均比 -1 大, 求 m 的取值范围.



精进不休 日新月异 1

18 已知函数 $f(x) = ax^2 + 4x - 1$.

- (1) 若函数在区间 $(-1, 1)$ 内恰有一个零点, 求实数 a 的取值范围.
- (2) 求函数在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.



恒能成立问题的讨论



直接分参型

19 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $(-3, 1)$.

(1) 求不等式 $ax^2 - 2x - 1 \geq 0$ 的解集.

(2) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 6x + b \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围.



对勾函数型

20 已知函数 $f(x) = x^2 + mx + 4$.

(1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

(2) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.



实数域上恒成立的讨论

21 设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$.

(1) 若对于一切实数 x , $f(x) < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

(2) 若对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

第 2 讲

指数运算与指数函数





指数运算的概念及运算公式



整数指数幂

1. 正整数指数幂

(1) 正整数指数幂的定义: $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^n$ ($a \in \mathbf{N}^*$).

(2) 正整数指数幂的运算法则:

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn};$$

$$\textcircled{3} a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n, a \neq 0);$$

$$\textcircled{4} (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

2. 正整数指数幂的推广

(1) 在上述法则③中, 限定 $m > n$;

如果取消这种限制, 则正整数指数幂就推广到了整数指数幂

(2) a^0 ($a \neq 0$) 的取值 ——

①根据法则③ $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$, 另一方面 $a^m \div a^m = 1$, 因此得到 $a^0 = 1$

②据此可得 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$),

3. 整数指数幂

根据 2, 上面的五条运算法则可以精简为三条:

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\textcircled{2} (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\textcircled{3} (a^m)^n = a^{mn}.$$



根式的概念与性质

1. n 次方根的定义

一般地, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

2. 特别注意

①当 n 是奇数时, 正数的 n 次方根是一个正数, 负数的 n 次方根是一个负数, 此时 a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示.

②当 n 是偶数时, 正数 a 的 n 次方根有两个, 记为 $\pm\sqrt[n]{a}$, 负数在实数范围内没有偶次方根.

3. 根式的定义

表达式 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 **根式**, 其中 n ($n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$) 叫做 **根指数**, a 叫做 **被开方数**.

4. 根式的性质

根据 n 次方根的意义, 可以得到:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(2) \textcircled{1} \text{当 } n \text{ 是奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a; \textcircled{2} \text{当 } n \text{ 是偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

$$(3) a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$



分数指数幂

1. 分数指数幂

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1).$$

2.0 的分数指数幂

0 的正分数指数幂是 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

3. 指数概念的扩充

规定了分数指数幂的意义以后, 指数的概念就实现了由整数指数幂向有理数指数幂的扩充



指数运算典型例题



基础运算公式

1 设 $a > 0$, 则下列运算正确的是 ().

A. $a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a$

B. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a$

C. $a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = 0$

D. $a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}}$

2 设 $a > 0$, 则下列运算中正确的是 ().

A. $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} = a$

B. $a \div a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$

C. $a^{\frac{1}{2}} a^{-2} = 0$

D. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$

3 已知 $10^m = 2$, $10^n = 3$, 则 $10^{m-n} = \underline{\hspace{2cm}}$.



实数运算

4 化简求值:

$$0.001^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{7}{8}\right)^0 + 16^{\frac{3}{4}} + (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3})^6.$$

5 求值: $\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} + 0.1^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3\pi^0 + \frac{37}{48}.$



6 计算: $(0.0081)^{-\frac{1}{4}} - \left[3 \times \left(\frac{7}{8} \right)^0 \right]^{-1} \times \left[81^{-0.25} + \left(3\frac{3}{8} \right)^{-\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}}.$



精进不休 日新月异 1

7 计算下列各式 (式中字母均是正数).

$$2\sqrt{3} \times 3 \times \sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[4]{12}.$$



包罗万象 举一反三 1

8 计算:

$$8^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{7}{8} \right)^0 + \sqrt[4]{(3-\pi)^4} + [(-2)^6]^{\frac{1}{2}}.$$



代数运算

9 化简求值:

$$\left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}.$$



10 计算下列各式（式中字母均是正数）.

$$\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right) \div \left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right).$$

11

化简: $\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{a \cdot b^5}}.$



指数函数的图像与性质

1. 指数函数的定义

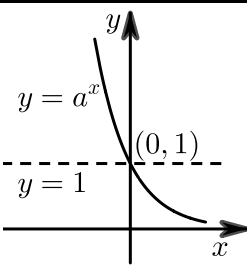
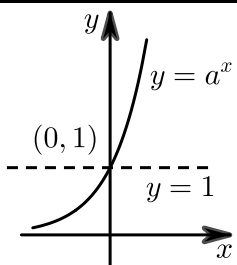
一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$) 叫做**指数函数**.

2. 特别注意 —— 对于定义要注意以下两点:

(1) 定义域是 $\mathbf{R}$

(2) 形式上的严格性: 在指数函数的定义表达式 $y = a^x$ 中, a 是常量且 a^x 前的**系数必须是 1**, 自变量 x 的位置**必须在指数的位置上**, 否则, 不是指数函数

3. 指数函数的图像和性质

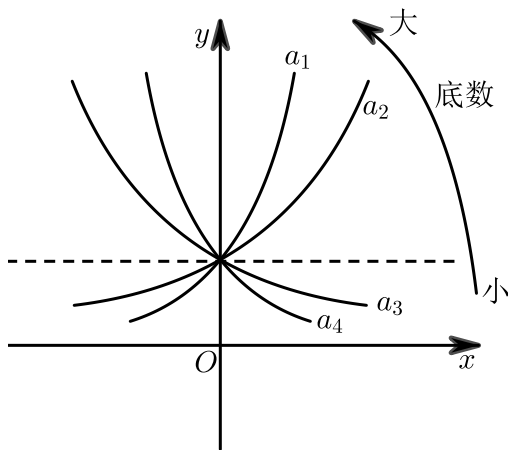
		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域	$\mathbf{R}$	
	值域	$(0, +\infty)$	
	过定点	图象过定点 $(0, 1)$, 即当 $x=0$ 时, $y=1$	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数
	函数值的变化范围	当 $x < 0$ 时, $y > 1$	当 $x < 0$ 时, $0 < y < 1$
		当 $x = 0$ 时, $y = 1$	当 $x = 0$ 时, $y = 1$
		当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$	当 $x > 0$ 时, $y > 1$



4. 底数对指数函数图象的影响

①当 $a > 1$ 时, a 值越大, 图象向上越靠近 y 轴, 递增速度越快; 当 $0 < a < 1$ 时, a 值越小, 图象向下越靠近 x 轴, 递减速度越快.

②底数对函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图象的影响如图 ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4$). 在第一象限具有“底大图高”的特征.



③当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.



比较大小

12 已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1.1}$, $b = \pi^0$, $c = 3^{0.9}$, 则 a, b, c 三者的大小关系是 ().

- A. $b < c < a$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

13 下列关系中正确的是 ().

- A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$
C. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ D. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

14 下列选项正确的是 ().

- A. $1.3^{\frac{1}{2}} > 1.5^{\frac{1}{2}}$ B. $3.14^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{3}}$
C. $(-0.5)^{-1} > (-0.6)^{-1}$ D. $0.7^3 > 0.6^3$

15 “ $0 < a < b$ ” 是 “ $\left(\frac{1}{4}\right)^a > \left(\frac{1}{4}\right)^b$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不是充分条件也不是必要条件



过定点问题

16 函数 $y = a^{x+1} - 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象一定经过的点是 _____.

17 函数 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必经过定点 _____.



解不等式

- 18 若全集 $U = \{x|x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 集合 $A = \{x|1 < 3^x < 27\}$, 则 $C_U A = (\quad)$.
 A. $(0, 3)$ B. $(-2, 0) \cup (3, 4)$ C. $(-2, 0] \cup [3, 4)$ D. $(-2, 1] \cup [2, 4)$
- 19 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $|x - 2| < 1$ ” 是 “ $3^x < 27$ ” 的 $(\quad)$.
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 20 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-3} > 1$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 21 不等式 $2^{x^2-4x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



指数函数综合问题



分段函数单调性

- 22 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \in (-\infty, 0] \\ (2a-1)x + (1-a), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 $(\quad)$.
 A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- 23 函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x, & x > 1 \\ a^x - \frac{2}{3}, & x \leq 1 \end{cases}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则数 a 的取值范围是 $(\quad)$.
 A. $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$



指数函数与函数性质综合

- 24 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2^x + 1} (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数.
 (1) 求 a 的值.
 (2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性 (不用证明).
 (3) 若关于 x 的不等式 $f(-2x^2 + 1) + f(x^2 - tx) \leq 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 求 t 取值范围.



复合函数单调性

- 25 已知函数 $f(x) = 2^{2x-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
求 $f(x)$ 的单调区间.



复合型指数函数的值域

- 26 已知函数 $f(x) = 2^{2x-x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
求 $f(x)$ 的值域.

第 3 讲

对数运算与对数函数 1

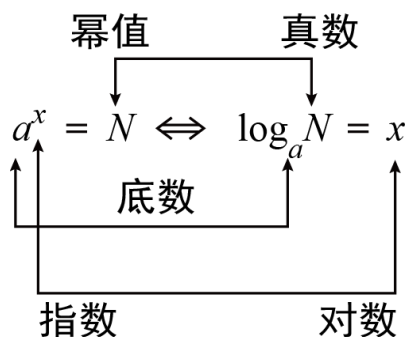




对数运算

1. 对数的定义

一般地，如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，
那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b = \log_a N$ ，
其中 a 叫做对数的**底数**， N 叫做**真数**。



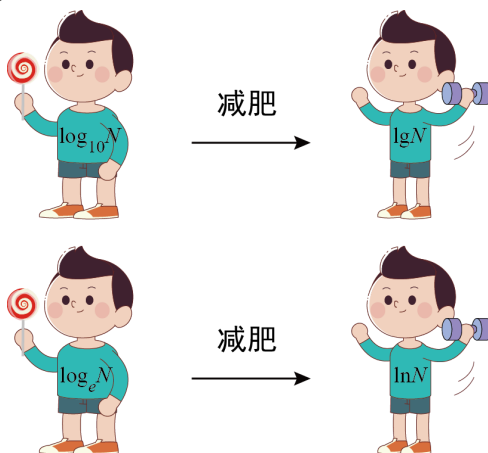
2. 两个特殊的对数

(1) **常用对数**：我们将以 **10 为底** 的对数叫做常用对数；

为了简便， N 的常用对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$ 。

(2) **自然对数**：在科学技术中常使用以 **e 为底** 的对数，我们称之为自然对数；

为了简便， N 的自然对数 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$ 。



3. 对数的性质

对数 $\log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 具有如下性质：

- ① 负数和零没有对数，即 $N > 0$ 。
- ② 1 的对数是 0，即 $\log_a 1 = 0$ ($\because a^0 = 1$)。
- ③ 底的对数是 1，即 $\log_a a = 1$ ($\because a^1 = a$)。
- ④ 对数恒等式：如果把 $a^b = N$ 中的 b 写成 $\log_a N$ ，那么 $a^{\log_a N} = N$ ，同理 $\log_a a^b = b$ 。



对数的基础性质

- 1 计算 $\log_2 (4^7 \times 2^5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 2 计算： $(0.25)^0 - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} + \ln \sqrt{e} + 2^{2-\log_2 3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 3 求值： $\log_2 (\lg 10) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 对数的运算公式

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$, 即积的对数等于对数的和.

推广: $\log_a(N_1 N_2 \cdots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_k$.

(2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$, 即商的对数等于对数的差.

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbf{R}$).



同底对数运算

4 化简:

$$\frac{\lg 2 + \lg 5 - \lg 8}{\lg 50 - \lg 40}.$$

5 计算:

$$2\log_5 10 + \log_5 0.25 + \lg 0.25 - \lg 25 + \ln \frac{1}{e}.$$

6 计算 $\log_3 \sqrt{27} + \lg 25 + \lg 4 - 7^{\log_7 2} - 27^{-\frac{2}{3}}$.



精进不休 日新月异

7

计算:

$$e^{\ln 4} + \log_{\sqrt{5}} 25 + \lg 25 + \lg 2 \cdot \lg 50 + (\lg 2)^2.$$

5. 对数换底公式:

$$\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}, \text{ 由此可得:}$$

$$(1) \log_N M \cdot \log_M N = 1.$$

$$(2) \log_{N^m} M^n = \frac{n}{m} \log_N M.$$

$$(3) \log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

由 (3) 可得:

$$(4) \log_a M \cdot \log_b N = \log_a N \cdot \log_b M.$$



换底公式

8

化简下列各式.

$$(\log_3 5 - \log_3 15)(\log_3 2 + \log_9 2) \log_5 7 \log_{49} \frac{1}{5} \log_8 9.$$

9

$$\text{计算: } \log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{3} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} + \log_2 3 \cdot \log_9 4 = \underline{\hspace{2cm}}.$$



对数函数的图像与性质

1. 对数函数的定义

函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数;

其中 x 是自变量, 函数的定义域是 $(0, +\infty)$, 值域为实数集 $\mathbf{R}$.

2. 两个特殊的对数函数

(1) 以 10 为底的对数函数 $y = \lg x$ 叫做常用对数函数;

(2) 以 e 为底的对数函数 $y = \ln x$ 叫做自然对数函数.

3. 对数函数的图像及性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
性质	定义域: $(0, +\infty)$	
	值域: $\mathbf{R}$	
	过点 $(1, 0)$, 即当 $x=1$ 时, $y=0$	
	$x \in (0, 1)$ 时 $y < 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时 $y > 0$	$x \in (0, 1)$ 时 $y > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时 $y < 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

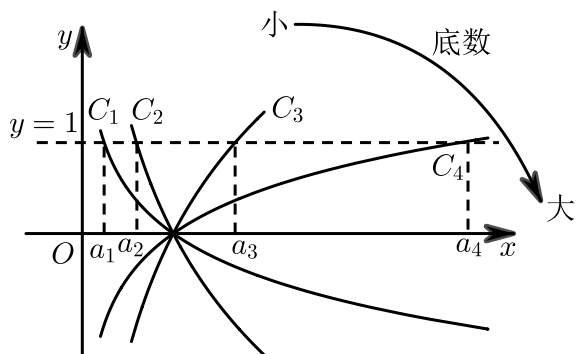
4. 底数对对数函数图像的影响

(1) 设 $y_1 = \log_a x$, $y_2 = \log_b x$, 其中 $a > 1$, $b > 1$ (或 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$),

当 $x > 1$ 时“底大图低”, 即若 $a > b$, 则 $y_1 < y_2$;

当 $0 < x < 1$ 时“底大图高”, 即若 $a > b$, 则 $y_1 > y_2$.

这一性质可通过下图帮助理解, 其中, C_1, C_2, C_3, C_4 分别是函数 $y = \log_{a_1} x$, $y = \log_{a_2} x$, $y = \log_{a_3} x$, $y = \log_{a_4} x$ 的图象, 则必有 $a_4 > a_3 > 1 > a_2 > a_1 > 0$.



(2) 在同一坐标系中, $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的图象与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称.



定义

- 10 在 $b = \log_{(a-2)}(5-a)$ 中, 实数 a 的取值范围是 ().
- A. $a > 5$ 或 $a < 2$ B. $2 < a < 3$ 或 $3 < a < 5$
C. $2 < a < 5$ D. $3 < a < 4$
- 11 使式子 $\log_{2x-1}(3-x)$ 有意义的 x 的范围是 ().
- A. $\frac{1}{2} < x < 3$ 且 $x \neq 1$ B. $\frac{1}{2} < x < 3$
C. $0 < x < \frac{1}{2}$ D. $x > 3$
- 12 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \log_7(x^2 - x)$ 的定义域是 _____.



定点

- 13 函数 $f(x) = \log_a(2x-3) - 4$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 _____.
- 14 已知函数 $y = \log_a(x+3) - \frac{8}{9}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 也在函数 $f(x) = 3^x + b$ 的图象上, 则 $b =$ _____.



比较大小

- 15 已知 $a = \log_{0.6} 0.5$, $b = \ln 0.5$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 ().
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
- 16 已知 $a = \log_{0.7} 0.8$, $b = \log_{1.1} 0.9$, $c = 1.1^{0.9}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $a < b < c$ D. $c < a < b$
- 17 已知 $x = \ln 3$, $y = \log_5 0.3$, $z = e^{-\frac{1}{2}}$, 则 ().
- A. $x < y < z$ B. $z < x < y$ C. $z < y < x$ D. $y < z < x$
- 18 若 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 9$, 则 ().
- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $a < c < b$
- 19 已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$, $b = \log_3 \frac{1}{2}$, $c = 3^{-\frac{1}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$
- 20 设 $a = 0.5^{0.4}$, $b = \log_{0.5} 0.3$, $c = \log_8 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$



精进不休 日新月异

- 21 设 $a = \log_3 7$, $b = 2^{1.1}$, $c = 0.8^{3.1}$, 则 ().
 A. $b < a < c$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $a < c < b$
- 22 设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 ().
 A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$



解不等式

- 23 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$, $A = \{x | \log_2(3-x) \leq 2\}$, $B = \left\{x | \frac{5}{x+2} \geq 1\right\}$.
 (1) $A \cap B$, $A \cup B$.
 (2) $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

- 24 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 4\right\}$, $B = \{x | \log_3 x \leq 2\}$.
 (1) 求 $A \cap B$.
 (2) 求 $\complement_U(A \cup B)$.

- 25 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $\lg x < 0$ ” 是 “ $2^{x-1} < 1$ ” 的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

第 4 讲

对数函数 2

及基本初等函数综合





对数函数综合问题



赋值运算

- 1 已知函数 $f(x) = \log_a(x+2) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
若 $f(6) = 2$, 求函数 $f(x)$ 的零点.



分段函数单调性

- 2 已知 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x - a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 那么 a 的取值范围是 ().
A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $\left[\frac{3}{2}, 3\right)$ D. $(1, 3)$



复合函数单调性

- 3 函数 $f(x) = \lg(x^2 - 3x - 10)$ 的单调递增区间是 _____.
4 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x)$ 的单调递增区间是 ().
A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 1)$
5 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(9 - x^2)$ 的单调递减区间为 _____.



对数函数与函数性质综合

- 6 已知函数 $f(x) = \log_a(x+1)$, $g(x) = \log_a(1-x)$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$).
(1) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的定义域.
(2) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明.
(3) 求使 $f(x) + g(x) < 0$ 成立的 x 的集合.



精进不休 日新月异

7 设函数 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域.
- (2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.
- (3) 证明函数 $f(x)$ 在其定义域上是单调增函数.

8 已知函数 $f(x) = \log_a(1+x)$, $g(x) = \log_a(3-x)$. ($a > 0, a \neq 1$)

- (1) 当 $a > 1$ 时, 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的最大值为 2, 求 a 的值.
- (2) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 取值范围.



复合型对数函数的值域

- 9 已知函数 $f(x) = \log_2(x+1) - 2$.
若 $x \in (-1, 3]$, 求 $f(x)$ 的值域.
- 10 已知函数 $f(x) = \log_a(x+2) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值互为相反数, 求 a 的值.



基本初等函数综合



分段函数赋值运算

- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$, 若 $f(x_0) = 3$, 则 x_0 的值为 ().
A. 1 B. 1 或 $\sqrt{3}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$
- 12 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ x^2+x-2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ().
A. $\frac{15}{16}$ B. $-\frac{27}{16}$ C. $\frac{8}{9}$ D. 18
- 13 已知 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 则 a 的值等于 _____
- 14 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x > 0 \\ -x^2 - 3x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) =$ _____.



相同函数

15 下列函数中与 $y = x$ 相同的为 ().

A. $s = \frac{t^2}{t}$

B. $u = \log_2 2^y$

C. $y = \sqrt{x^2}$

D. $m = |n|$

16 下列函数中, 与 $y = x$ 相同的函数是 ().

A. $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = \lg 10^x$

C. $y = \frac{x^2}{x}$

D. $y = (\sqrt{x-1})^2 + 1$

17 下列各组函数中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 表示相同的函数的是 ().

A. $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2 \lg x$

B. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

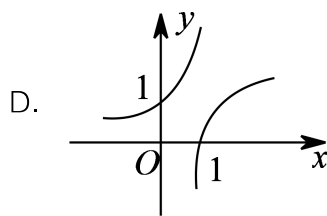
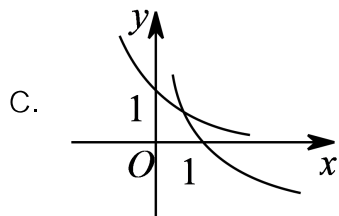
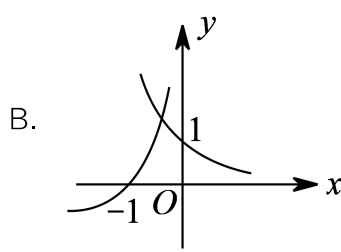
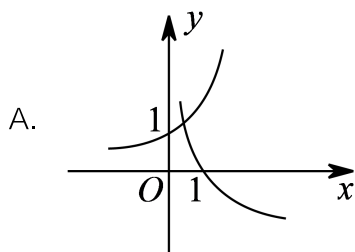
C. $f(x) = 1 (x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0)$, $g(x) = \frac{x}{|x|}$

D. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

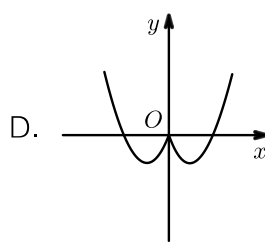
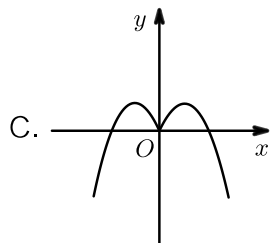
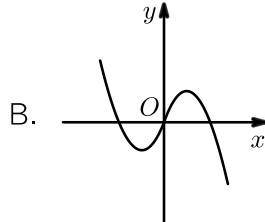
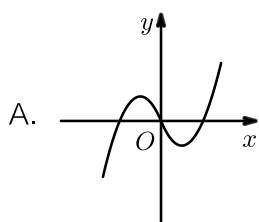


函数图像

18 函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在同一坐标系中的图象可能是 ().

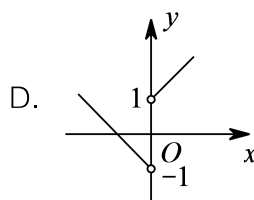
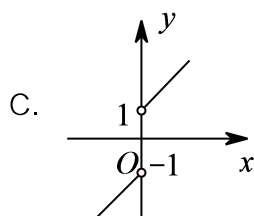
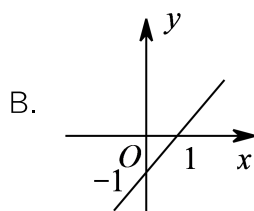
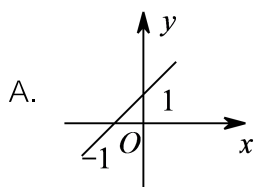


19 函数 $y = x(x^2 - 1)$ 的大致图象是 ().





20 函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 的图象是 ().



零点问题

21 函数 $f(x) = 2^x + x$ 的零点所在的一个区间是 ().

A. (1, 2)

B. (0, 1)

C. (-1, 0)

D. (-2, -1)

22 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是 ().

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, 1)$

C. (1, 2)

D. (2, 3)



精进不休 日新月异

23 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ 2^x - 1, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是 ().

A. $0 < b < 1$

B. $b < 0$

C. $-2 < b < 0$

D. $-1 < b < 0$

24 函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 零点个数是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4