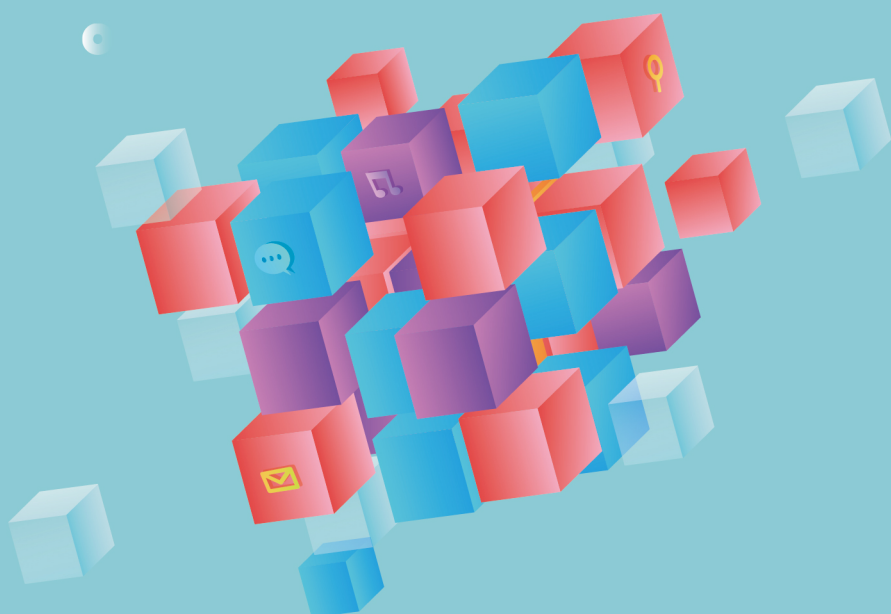


知识魔方

i 数学



总 主 编：马建明

本模块主编：吕金琳

教 研 团 队：吕金琳

封面设计：刘雅迪

前言

学而思一对一产品升级介绍

为进一步打造本地化产品，助力学生高考，学而思 1 对 1 产品团队打造了模块课系列产品，该产品旨在将高中阶段所有的知识点全部打散，再针对每一个学生的具体情况重新组合，制定个性化的学习方案，帮助学生进步。

随着模块课 1.0 版本的推进，无论是课程选择，还是内容学习上，学生有更多可以选择的空间，切实满足不同学生的个性化需求。本着“随需而变，才有未来”的精神，我们又推出了 2.0 版本《知识魔方·i 系列》，此系列涵盖《知识魔方·i 数学》、《知识魔方·i 物理》、《知识魔方·i 化学》、《知识魔方·i 生物》、《知识魔方·i 历史》多种学科，结合学科共性，统一产品逻辑，与此同时，兼顾到学科特色，创新学习形式，激发学生学习兴趣，做学习的主人。

本产品在设计上有三个突出的**特点**：

- (1) 模块产品，私人订制效果棒
- (2) 本地优化，海量资源覆盖广
- (3) 知识解构，新旧旧识尽入囊



扫描二维码，关注公众号，获取更多学习资料

高中数学课程产品设计

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

本模块中，我们将重点学习函数在高中阶段最重要的两个性质——单调性、奇偶性

在第一节【函数的单调性】中，我们将学会如何判断、证明函数的单调性并求解对应的单调区间及函数的最值。而后在此基础上，我们会继续研究复合函数和分段函数的单调性，并利用所学知识求解相对基础的单调性的问题。

在第二节【函数的奇偶性】中，我们将学习到奇偶函数的定义，并研究其最值与单调性的特点，并借助所学知识求解相应函数问题。

而在最后一讲【函数的性质综合】中，我们会结合前面两讲学习到的函数的单调性、奇偶性共同应用解题，求解不等式、比较大小、图像判断、及恒能成立和含参的综合性问题，并结合所学内容进一步理解函数的零点的基础问题。

目 录

第 1 讲 函数的单调性.....	01
第 2 讲 函数的奇偶性.....	03
第 3 讲 函数的性质综合.....	07



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

函数的单调性





单调性的判断与求解

- 1 下列函数中, 在区间 $(0, 1)$ 上是增函数的是 ().
- A. $y = 3 - x$ B. $y = \frac{1}{x}$ C. $y = -x^2 + 4$ D. $y = |x|$
- 2 函数 $y = x^2 + x + 2$ 的单调递减区间是 ().
- A. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$



最值的求解

- 3 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值为 A , 最小值为 B , 则 $A - B$ 等于 ().
- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. 2 D. -2



分段函数单调性

- 4 函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 1 & (x > 2) \\ -x + 1 & (x \leq 2) \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1-a)x + a, & x < 0 \\ (a-3)x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围为 _____.
- 6 若函数 $f(x) = \begin{cases} (2b-1)x + b - 1, & x > 0 \\ -x^2 + (2-b)x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则实数 b 的取值范围是 _____.
- 7 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + (2-a)x, & x \leq 0 \\ (2a-1)x + a - 1, & x > 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则 a 取值范围为 _____.



根据函数单调性求参数值或取值范围

- 8 若函数 $f(x) = 2x^2 - mx + 3$, 当 $x \in (-\infty, -2]$ 时是减函数, 当 $x \in [-2, +\infty)$ 时是增函数, 则 $m =$ _____.
- 9 若函数 $f(x) = 2x^2 - kx - 8$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 k 的取值范围为 _____.
- 10 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ax + 3$ 在区间 $(-\infty, 4)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.

第 2 讲

函数的奇偶性





判断函数奇偶性单调性

1 下列函数既是偶函数，又在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 () .

A. $y = x$

B. $y = -x^2$

C. $y = |x|$

D. $y = \frac{1}{x}$

2 下列函数中，既是奇函数又在定义域上是增函数的为 () .

A. $y = -2x$

B. $y = -2x^2$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = x$



求解析式

3 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^3 + x + 1$ ，则当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 的解析式为 () .

A. $f(x) = x^3 + x - 1$

B. $f(x) = -x^3 - x - 1$

C. $f(x) = x^3 - x + 1$

D. $f(x) = -x^3 - x + 1$

4 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^3 - 2x^2$ ，则当 $x < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式是 () .

A. $f(x) = x^3 - 2x^2$

B. $f(x) = x^3 + 2x^2$

C. $f(x) = -x^3 + 2x^2$

D. $f(x) = -x^3 - 2x^2$



求函数值

5 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2$ ，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = ()$.

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{9}{4}$

D. $\frac{9}{4}$



求参数值

6 若函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[2a, 1-a]$ 上的奇函数，则 a 的值为 _____ .

7 若函数 $f(x) = \frac{x}{(2x-1)(x+a)}$ 是奇函数，则实数 $a = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

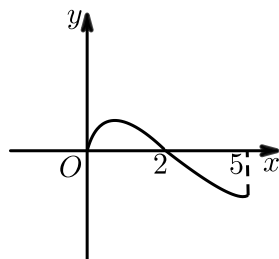
C. 1

D. -1



求解不等式

- 8 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-5, 5)$, 若 $x \in [0, 5)$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 _____.



- 9 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递减, 则满足 $f(2x-1) > f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
- 10 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足条件 $f(2x+1) < f(5)$ 的 x 的取值范围是 ().
- A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-2, 2)$ D. $[-3, 2]$
- 11 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(2) = 0$, 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是 ____.
- 12 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的增函数, 且 $f(1-m) < f(m)$, 则实数 m 的取值范围 ____.



综合应用

- 13** 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$.
- (1) 若 $g(x) = f(x) - a$ 为奇函数, 求 a 的值.
- (2) 试判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义证明.



14 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- (1) 判断函数的奇偶性, 并加以证明.
- (2) 用定义证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性.

15 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x > 0$ 时, 函数的解析式为 $f(x) = \frac{2}{x} - 1$.

- (1) 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.
- (2) 求当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的解析式.

第 3 讲

函数的性质综合





解不等式

- 1 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $f(2) = 0$, 则 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为 ().
- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- 2 定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 为减函数, 则满足不等式 $f(1+m) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的 m 的取值范围是 _____.
- 3 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且有区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 则不等式 $f(2x-1) < 0$ 的解集为 ().
- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ B. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
- 4 定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$, 当 $x \in [-2, 0]$ 时 $f(x)$ 单调递增, 设 $f(1-m) < f(m)$, 则 m 的取值范围为 _____.



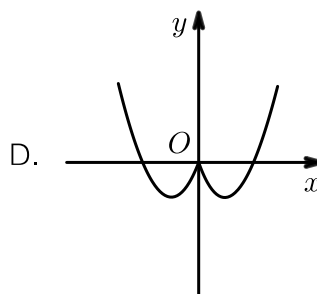
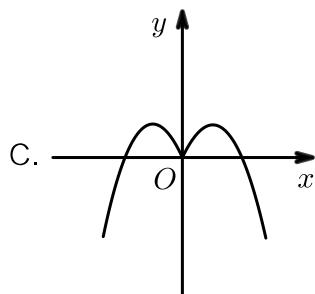
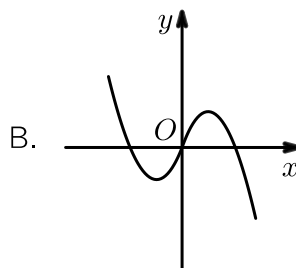
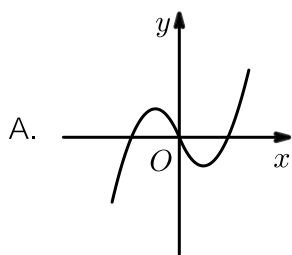
比较大小

- 5 设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 是减函数, 则 $f(-2)$, $f(\pi)$, $f(-3)$ 的大小关系是 ().
- A. $f(\pi) > f(-3) > f(-2)$ B. $f(\pi) > f(-2) > f(-3)$
C. $f(\pi) < f(-3) < f(-2)$ D. $f(\pi) < f(-2) < f(-3)$
- 6 设 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(1)$, $f(-2)$, $f(-3)$ 的大小关系是 _____.



图像判断

7 函数 $y = x(x^2 - 1)$ 的大致图象是 ().



综合性问题



定义证明

8 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

(1) 当 $a \in \mathbf{R}$ 时, 用定义证明 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 当 $a < 0$ 时, 用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

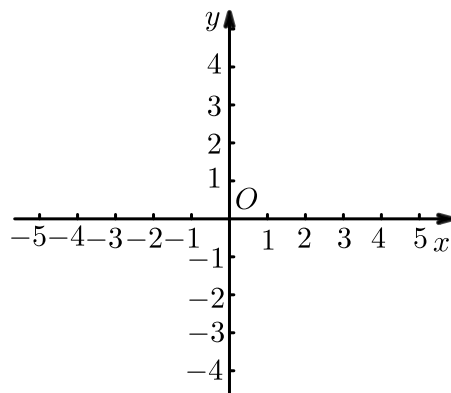


画图并判断单调性

9 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并画出函数 $f(x)$ 的图像.

(2) 根据函数图像写出 $f(x)$ 的单调区间和值域.



解不等式

10 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断当 $x \in (-1, 1)$ 时函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明.

(3) 解不等式 $f(t^2 - 1) + f(t) < 0$.



11 已知定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数.

- (1) 求实数 a 的值.
- (2) 判断并证明函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性.
- (3) 解关于 t 的不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

12 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- (1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性.
- (2) 判断当 $x \in (-1, 1)$ 时函数 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明.
- (3) 若 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 解不等式 $f(2x-1) + f(x) < 0$.



最值

13 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} (x \neq 0)$.

- (1) 证明函数 $f(x)$ 为奇函数.
- (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由.
- (3) 若 $x \in [-3, -2]$, 求函数的最大值和最小值.

14 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 4$.

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的值域.
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上时减函数, 求 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上的最大值与最小值.



零点问题

15 已知函数 $f(x) = x|x - 1|$.

(1) 在给定的直角坐标系内画出 $f(x)$ 的图象，并写出函数的单调区间.

(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 公共点的个数.

