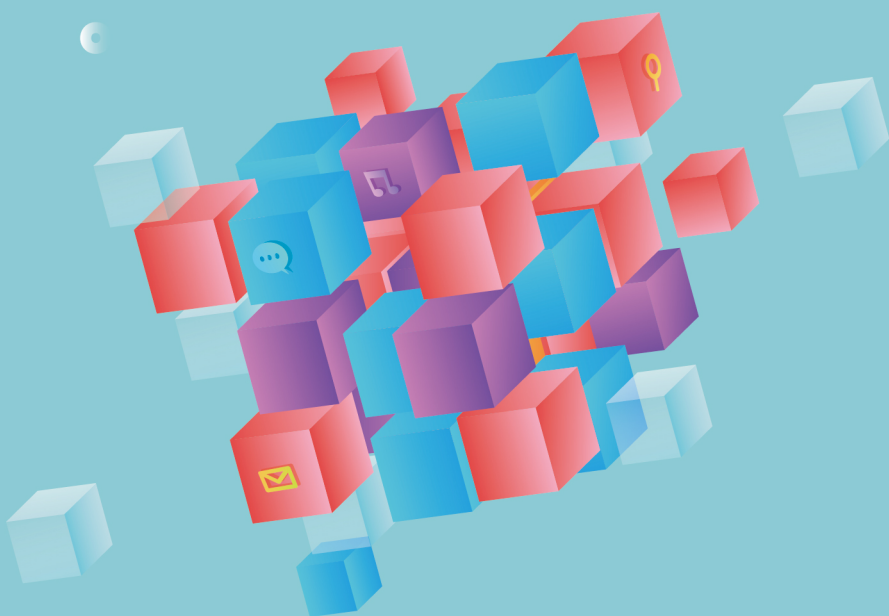


知识魔方

i 数学



主 编：马建明

本模块制作人：吕金琳

本模块审核人：闫聪聪

封面设计：林梦涵

教研团队：高中数学组

前言

学而思爱智康产品升级介绍

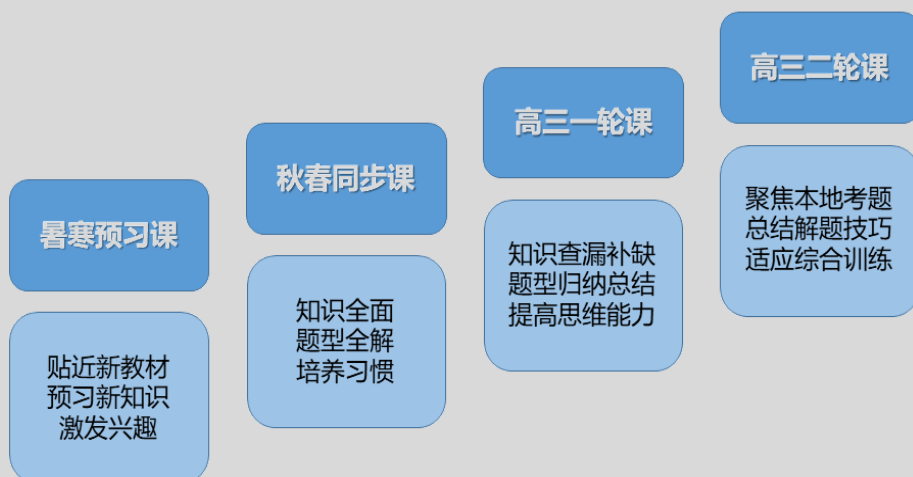
新教材改革已经如火如荼地展开，智康新产品助学助考的开发问题已成为家长和学子重点关注的焦点。应广大家长和学子的需求，我们带领最优质的高中理科教师团队制作出最新人教版教材的全模块切片产品。该系列产品能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照新教材理念科学高效的学习。该书以“三次课学懂一个模块”为宗旨，帮你轻松找到学习目标，助你走向成功。

这套产品在整体设计上有四个突出的特点：

- (1) 标准教学大纲变为专属大纲，并且可以随时调整
- (2) 讲义 + 习题册，形成测、讲、评、练学习闭环
- (3) 难度阶梯分明，在学科层次上由浅入深、给不同程度的学生都能带来持续的进步
- (4) 针对本地考卷进行大数据分析，精选例题，直击考点

如果你在使用的过程中发现有那里需要改正或者优化，希望优秀的你能够给予我更多的建议与意见，帮助我更好的提升自己。

高中理科产品课程体系



扫描右侧二维码
提出你的意见与建议吧



高三数学课程产品设计

考点占比：让同学们更加清楚本模块知识在高考中的地位。

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

本模块标准讲义选题主要为：2020 年各区二模试卷、各学校三四月份模拟考试卷、高三上学期期末试卷；

本模块主要用于高三考生四月至六月最后阶段的冲刺复习，内容主要围绕着天津高考常见的题型进行复习。

目 录

第 1 讲 导函数专项复习..... 01

- 知 识 点 1 导函数的基础应用
- 知 识 点 2 导函数模考常见基础题型
- 知 识 点 3 函数与方程
- 知 识 点 4 导数解答

第 2 讲 三角函数及解三角形专项复习.....07

- 知 识 点 1 三角函数基础性应用
- 知 识 点 2 三角函数的图像性质
- 知 识 点 3 解三角形
- 知 识 点 4 解三角形解答

第 3 讲 数列、基本不等式专项复习.....13

- 知 识 点 1 数列
- 知 识 点 2 基本不等式

第 4 讲 立体几何、平面向量、复数专项复习.....19

- 知 识 点 1 立体几何解答
- 知 识 点 2 空间几何体
- 知 识 点 3 平面向量
- 知 识 点 4 复数



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



目 录

第 5 讲 曲线性质选填 + 椭圆解答专项复习.....25

- 知 识 点 1 直线与圆
- 知 识 点 2 圆锥曲线选填
- 知 识 点 3 椭圆解答

第 6 讲 概率统计及计数原理专项复习.....31

- 知 识 点 1 概率统计
- 知 识 点 2 计数原理

第 7 讲 自测模拟卷.....37



我们一起开始学习吧 o (*^_^*) o



第 1 讲

导函数专项复习



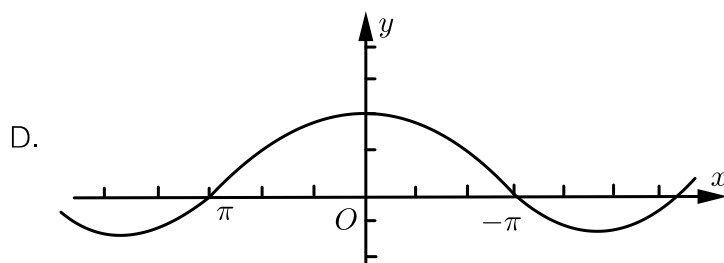
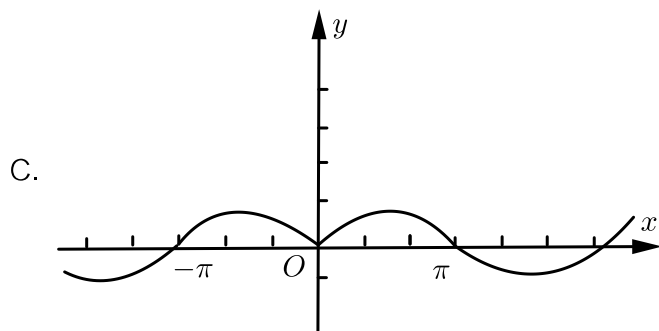
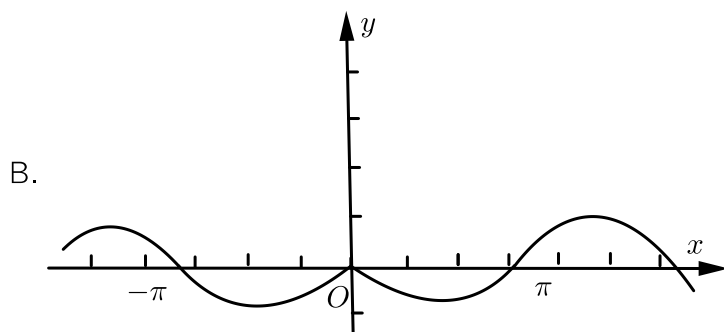
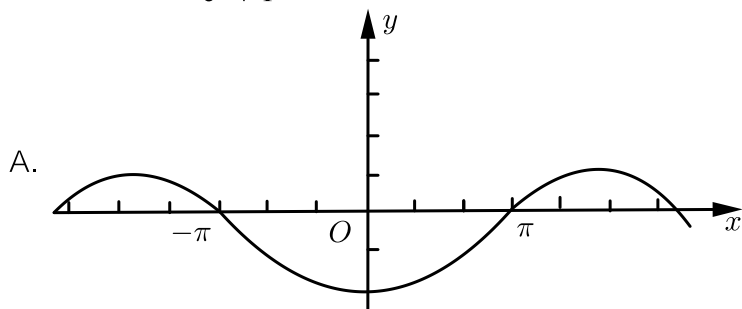


导函数的应用

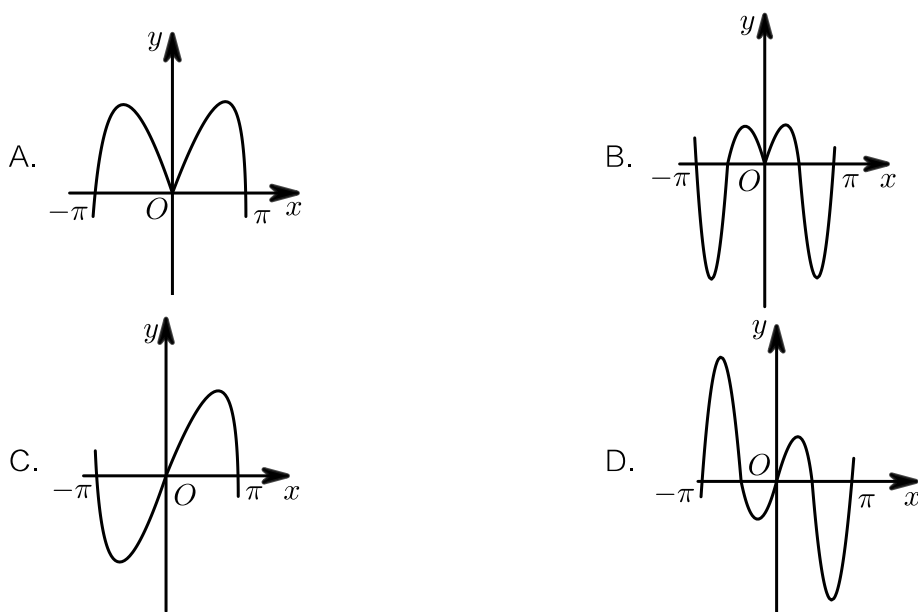


图像判定

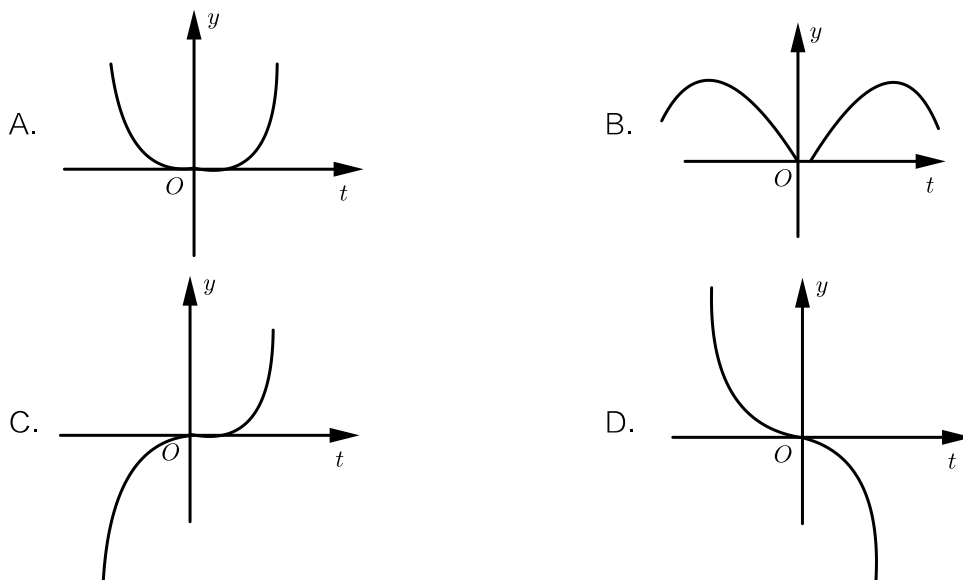
- 1 函数 $f(x) = \frac{(e^x - 1) \sin x}{e^x + 1}$ 的部分图象大致为 ().



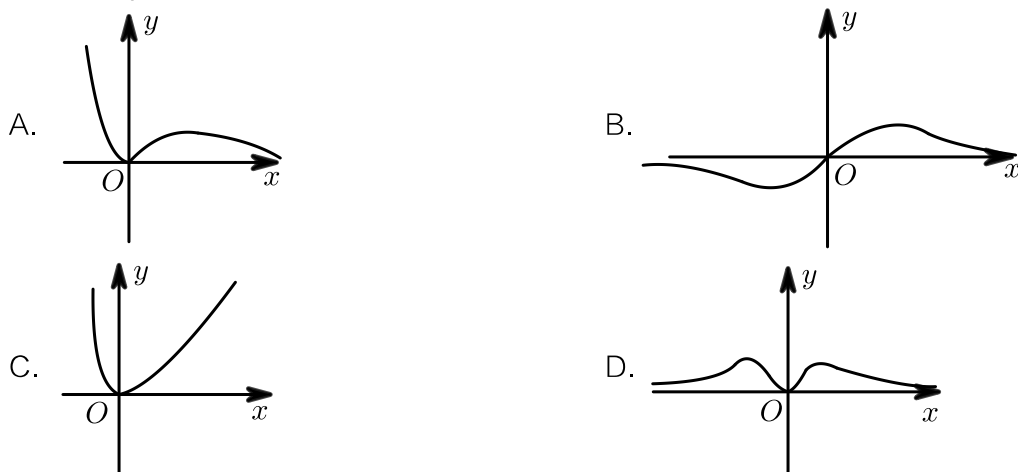
2 函数 $y = 2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是 ().



3 我国著名数学家华罗庚说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事体。”函数 $f(x) = \frac{x(e^{-x} + e^x)}{2 + \cos x}$ 的部分图象大致为 ().



- 4 函数 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象大致是 ().



比较大小

- 5 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 若 $a = -f(\log_2 \frac{1}{5})$, $b = f(\log_2 4.1)$, $c = f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$
- 6 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则三个数 $a = f(-\log_3 13)$, $b = f(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8})$, $c = f(2^{0.6})$ 的大小关系为 ().
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$
- 7 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x-1)$ 的图像关于 $x=1$ 对称, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$
- 8 已知函数 $f(x) = e^{-|x|}$, $a = f(\log_e \frac{1}{3})$, $b = f(\log_3 \frac{1}{e})$, $c = f(\log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{9})$, 则下述关系式正确的是 ().
- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $a > b > c$
- 9 已知 $a = \log_3 0.3$, $b = \log_{0.3} 2$, $c = 3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
- 10 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 ().
- A. $f(2^{1.1}) > f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$ B. $f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(\ln 3)$
 C. $f(\ln 3) > f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$ D. $f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(2^{1.1})$

- 11 设函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$, $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.7^{1.4})$, $c = f(3^{0.75})$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$



求解切线方程

- 12 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$, 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____.
- 13 曲线 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 _____.
- 14 曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 ().
- A. $2e$ B. e C. 2 D. 1



函数与方程

- 15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.
- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $[0, 1]$
- 17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \end{cases}$, 函数 $g(x) = kx$, 若关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 有 3 个互异的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{5}{6}\right)$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
- 18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ D. $(-1, 0)$



导数解答



零点存在性定理的证明

19 函数 $f(x) = \ln x - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 已知 $x_1 = \sqrt{e}$ 和 x_2 是函数 $f(x)$ 的两个不同的零点, 求 a 的值并证明: $x_2 > e^{\frac{3}{2}}$. (其中 e 为自然对数的底数)

第 2 讲

三角函数及解三角形专项复习





三角函数基础性应用



平移变换

- 1 要得到函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 ().
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度



奇偶性、对称性

- 2 若将函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是 _____.
- 3 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得的图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是 _____.



确定区间上的单调性

- 4 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则函数 $y = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 为 ().
- A. 奇函数且在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内单调递增
B. 偶函数且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增
C. 偶函数且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减
D. 奇函数且在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内单调递减
- 5 设函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 ().
- A. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
B. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
C. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
D. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称



综合判断

- 6 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$, 则 ().
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称
C. $f(x)$ 的最大值为 2
D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称



三角函数解答

7 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值.

(2) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.



三角函数的图像性质

8 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$, $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, 且与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 则函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的一个单调减区间为 ().

A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$

B. $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$

D. $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

9 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称且 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$, $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 则 ω 可取数值的个数为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



零点问题

10 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi) (0 < \varphi < \pi)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 且在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上存在零点, 则 φ 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

B. $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

D. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$



解三角形



基础应用

- 11 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 a 等于 ().
- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$
- 12 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ ().
- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- 13 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\sqrt{2}a \sin C - c \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 则 $\cos A =$ _____.



解答

- 14 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2\cos^2 x - 1$, $x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = \sqrt{6}$, $f(C) = 0$, $\sin C + \sin(B - A) = 2 \sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

15 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$.

(1) 求 c 的值.

(2) 求 $\sin\left(2C + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

16 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos B = -\frac{1}{3}, b \sin B - a \sin A = 2c \sin C$.

(1) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 求 $\frac{a}{c}$ 的值.



- 17 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $b - c = 1$, $\cos A = \frac{1}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.
- (1) 求 a, b, c 的值.
- (2) 求 $\cos(2C + A)$ 的值.

- 18 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a \sin A = 4b \sin B$, $ac = \sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2)$.
- (1) 求 $\cos A$ 的值.
- (2) 求 $\sin(2B + A)$ 的值.

第 3 讲

数列、基本不等式专项复习





数列



数列性质选填题中的应用

- 1 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2S_3 = a_4 + 1$, $2S_2 = a_3 + 1$, 则 $a_1 = (\quad)$.
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 9$, $S_{10} = 100$, 则 $a_7 = (\quad)$.
A. 11 B. 13 C. 15 D. 17
- 3 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 3a_3$, 则公比 $q = (\quad)$.
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 或 $-\frac{1}{2}$ D. -1 或 $\frac{1}{2}$
- 4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_3 \cdot a_5 = 4a_6^2$, 则 a_3 的值为 $(\quad)$.
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2



错位相减

- 5 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, 满足 $2S_n = 3(a_n - 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.
(1) 求证: $\{a_n\}$ 为等比数列, 并写出其通项公式.
(2) 设 $b_n = (2n - 1)a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

- 6 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, d 为整数, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 已知 $a_1 = b_1$, $b_2 = 2$, $d = q$, $S_{10} = 100$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .



裂项相消

- 7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $3S_n = a_n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 对任意的正整数 n , 设 $b_n = -\frac{1}{n \log_2 |a_{n+2}|}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{3}{4}$.



8 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $3a_2 - a_1 = 1$, 且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $b_1 = \frac{1}{2}$, $4b_n = a_{n-1}a_n$, 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 证明: $T_n < 1$.



简单综合

9 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$, $2a_1$, $a_1 + a_2 + a_3$ 分别是等比数列 $\{b_n\}$ 的首项和第二项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和.

(3) 求 $\sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

10 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_3 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 的前 n 项和.

(3) 设 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .



分组求和

- 11 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为正数, $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1 = 2$, 且 $b_2 S_2 = 12$, $b_2 + S_3 = 10$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 设 $c_n = b_n + \frac{1}{S_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.



基本不等式

- 12 已知点 $P(x, y)$ 在直线 $x + 2y - 3 = 0$ 上, 则 $2^x + 4^y$ 的最小值为 _____.
- 13 已知正实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $\left(\frac{x}{y} + y\right)\left(\frac{y}{x} + x\right)$ 的最小值为 _____.
- 14 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$, 则 xy 的最小值为 _____.
- 15 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3 b^3}{a^2 b^2}$ 的最小值为 _____.
- 16 已知 $a > 0, b > 0$, 并且 $\frac{1}{a}, \frac{1}{2}, \frac{1}{b}$ 成等差数列, 则 $a + 9b$ 的最小值为 ().
- A. 16 B. 9 C. 5 D. 4

第 4 讲

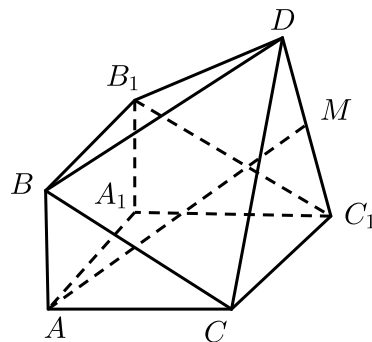
立体几何、平面向量、 复数专项复习





立体几何解答

- 1 如图，由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D - BB_1C_1C$ 构成的几何体中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ， $BC = BB_1 = 2$ ， $C_1D = CD = \sqrt{5}$ ，平面 $CC_1D \perp$ 平面 ACC_1A_1 。
- (1) 求证： $AC \perp DC_1$ 。
- (2) 若 M 为 DC_1 中点，求证： $AM \parallel$ 平面 DBB_1 。
- (3) 在线段 BC 上（含端点）是否存在点 P ，使直线 DP 与平面 DBB_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ ？若存在，求 $\frac{BP}{BC}$ 的值，若不存在，说明理由。



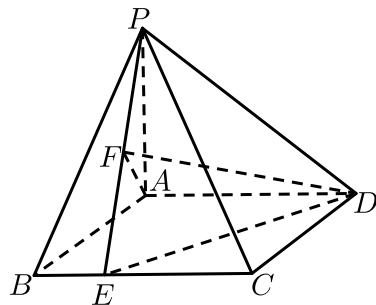
- 2 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 且 $PA = AB = 2$, $AD = 3$, E 是线段 BC 上的动点, F 是线段 PE 的中点.

(1) 求证: $PB \perp$ 平面 ADF .

(2) 若直线 DE 与平面 ADF 所成角为 30° ,

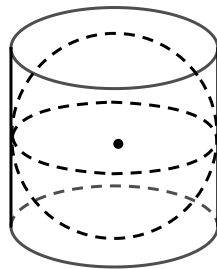
①求线段 CE 的长.

②求二面角 $P-ED-A$ 的余弦值.



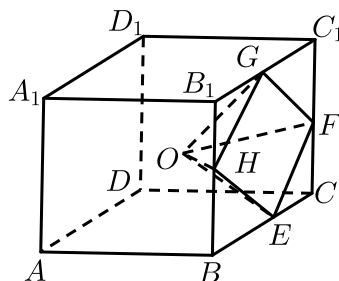
空间几何体

- 3 如图所示是古希腊数学家阿基米德的墓碑文, 墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等, 相传这个图形表达了阿基米德最引以为自豪的发现. 我们来重温这个伟大发现, 圆柱的表面积与球的表面积之比为 _____.



- 4 若一个球的体积是 $\frac{256\pi}{3}$, 则该球的内接正方体的表面积是 _____.

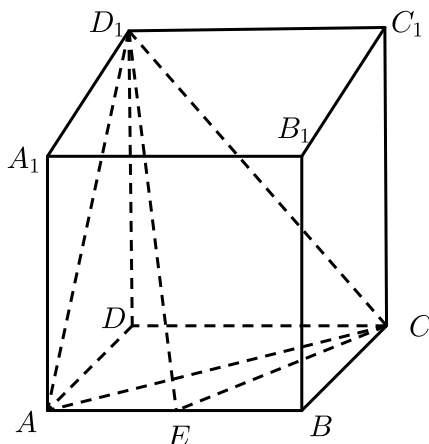
- 5 如图, 点 O 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心, E, F, G, H 分别为其所在棱的中点, 且 $BC=BB_1$. 记棱 AB 的长度为 l , 点 O 到平面 BCC_1B_1 的距离为 l_0 , 则 $l=$ _____ l_0 ; 若该长方体的体积为 120, 则四棱锥 $O-EFGH$ 的体积为 _____.



- 6 三棱锥的棱长均为 $4\sqrt{6}$, 顶点在同一球面上, 则该球的表面积为 ().

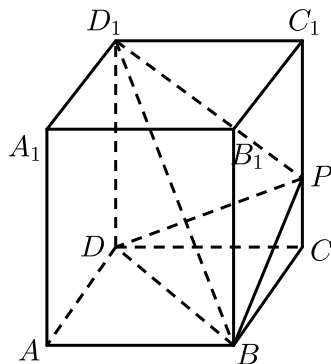
A. 36π B. 72π C. 144π D. 288π

- 7 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是面积为 2 的正方形, 该长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$, 点 E 为棱 AB 的中点, 则三棱锥 D_1-ACE 的体积是 ().



A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

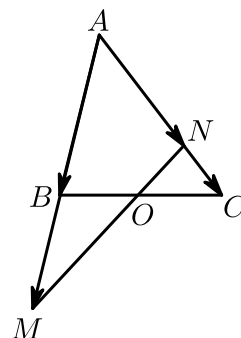
- 8 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧棱 CC_1 上一点, 且 $C_1P=2PC$. 设三棱锥 $P-D_1DB$ 的体积为 V_1 , 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 则 $\frac{V_1}{V}$ 的值为 _____.





平面向量

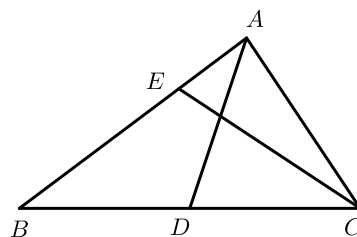
- 9 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB , AC 于不同的两点 M , N , 若 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为 ().



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

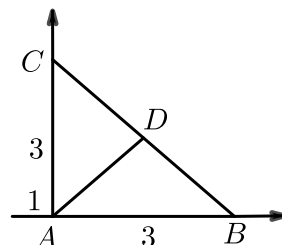
- 10 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120° , 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$, 则实数 λ 的值为 _____.

- 11 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, 且 $BE = 2EA$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC}$, 则 $\frac{AB}{AC}$ 的值为 _____.



- 12 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

- 13 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 的中点, 且 M 点在 $\triangle ACD$ 的内部 (不含边界), 若 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围为 _____.





集合

- 14 设全集 $I = \{x \mid -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$, 则 $A \cup (\complement_I B) = (\quad)$.
 A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
- 15 已知集合 $A = \{x \mid |x - 2| > 1\}$, $B = \{x \mid y = \lg(2x - x^2)\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = (\quad)$.
 A. $(1, 2)$ B. $[1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(0, 1]$



简易逻辑



命题的否定

- 16 命题 “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} > x_0 + 1$ ” 的否定是 () .
 A. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x < x + 1$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} < x_0 + 1$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq x + 1$ D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} \leq x_0 + 1$



充分条件与必要条件

- 17 已知 $p: x \geq k$, $q: \frac{3}{x+1} < 1$, 如果 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 k 的取值范围是 ()
 A. $[2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$
- 18 已知实数 $x > 0, y > 0$, 则 “ $2^x + 2^y \leq 4$ ” 是 “ $xy \leq 1$ ” 的 () .
 A. 充要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

第 5 讲

曲线性质选填 + 椭圆解答专项复习





直线与圆的位置关系

- 1 过点 $(1, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为 _____.
- 2 已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上, 且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 若点 $M(0, \sqrt{3})$ 在圆 C 上, 则圆 C 的方程为 _____.
- 3 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程为 _____.
- 4 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.



圆锥曲线选填

- 5 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(3, 4)$, 且双曲线的一个焦点与抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点重合, 则双曲线的方程为 ().
 A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
- 6 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则双曲线的实轴长是 ().
 A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 1 D. 2
- 7 已知双曲线的一个焦点与抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点重合, 且双曲线上的一点 P 到双曲线的两个焦点的距离之差的绝对值等于 6, 则该双曲线的标准方程为 ().
 A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
- 8 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 且双曲线的离心率等于 $\sqrt{5}$, 则该双曲线的实轴长为 ().
 A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. 1
- 9 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合, 则该抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 ().
 A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5



直线与圆锥曲线的位置关系

- 10 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$ 交抛物线于 A, B 两点, 过点 A 作准线 l 的垂线, 垂足为 E , 若等边 $\triangle AFE$ 的面积为 $36\sqrt{3}$, 则 $\triangle BEF$ 的面积为 ().
- A. $6\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. 16 D. $24\sqrt{3}$
- 11 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 以双曲线 C 的右焦点 F 为圆心, a 为半径作圆 F , 圆 F 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 则 $\angle MFN = ()$.
- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°
- 12 抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 是双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{1-m} = 1 (0 < m < 1)$ 的右焦点, P 是 C_1 与 C_2 的交点, 点 Q 在 C_1 的准线上, $\triangle FPQ$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 C_2 的离心率为 ().
- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $2\sqrt{2} + 3$ C. $2\sqrt{10} - 3$ D. $2\sqrt{10} + 3$



椭圆解答



直线方程求解

- 13 设椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左顶点为 A , 左焦点到左顶点的距离为 1, 离心率为 $\frac{1}{2}$.
- (1) 求椭圆 M 的方程.
- (2) 过点 A 作斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于另一点 B , 连接 BF_2 并延长交椭圆 M 于点 C , 若 $F_1C \perp AB$, 求 k 的值.

14 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右, 顶点分别为 A, B , 点 M, N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点, 且 $F_1M // F_2N$, 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $3k_1 + 2k_2 = 0$, 求直线 F_1M 的方程.



弦长公式的应用

15 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $P(2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 F 为 C 的左焦点, 点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点, 过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B

①证明: OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点).

②当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时, 求点 M 的坐标.



定值问题

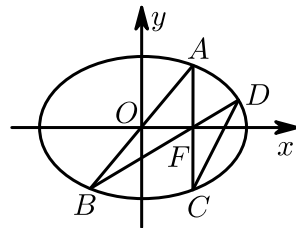
16

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{3}{2})$. F 为椭圆的右焦点， A, B 为椭圆关于原点对称的两点，连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；

(3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.



17

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点分别为点 $A(-2, 0), B(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N ，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E . 证明： $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为定值.



条件转化 —— 三点共线

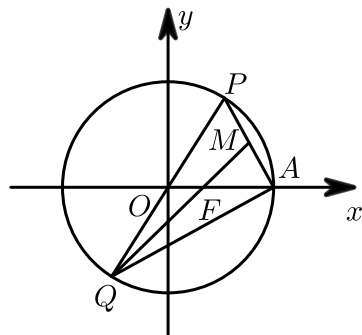
18 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F, A ，过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q （点 P 在第一象限内），连接 AP, FQ ，若 $AF = 2$ ， $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积 3 倍。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 已知 M 为线段 PA 的中点，连结 QA, QM 。

①求证： Q, F, M 三点共线。

②记直线 QP, QM, QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$ ，求 $\triangle PQM$ 的面积。



第 6 讲

概率统计及计数原理专项复习



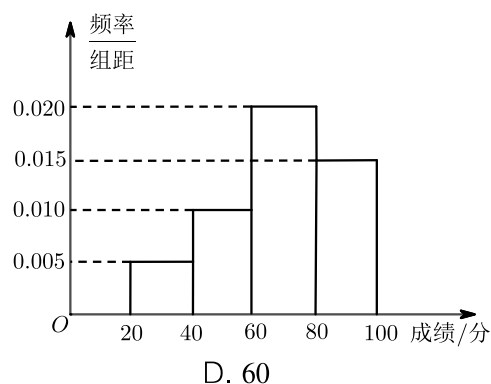


概率统计



频率分布直方图

- 1 某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据的分组依次为 $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100]$ 。若低于 60 分的人数是 18 人，则该班的学生人数是（ ）。



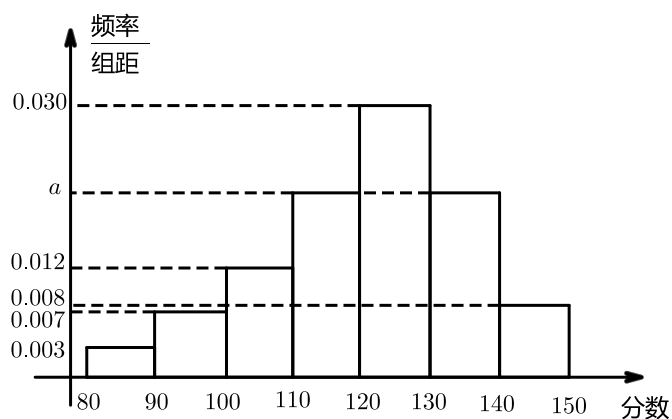
A. 45

B. 48

C. 54

D. 60

- 2 已知某校一次数学测验所有学生得分都在 $[80, 150]$ 内，根据学生得分情况绘制的频率分布直方图如图所示，则图中 a 的值是（ ）。



A. 0.015

B. 0.020

C. 0.030

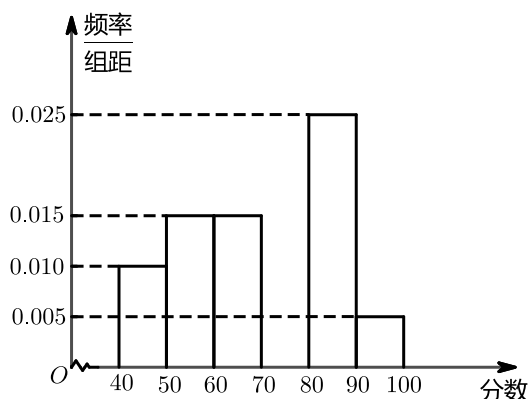
D. 0.040

- 3 某市为了解全市居民日常用水量的分布情况，调查了一些居民某年的月均用水量（单位：吨），其频率分布表和频率分别直方图如下：则图中 t 的值为（ ）。

分组	频数	频率
$[0, 0.5)$	4	0.04
$[0.5, 1)$	5	0.08
$[1, 1.5)$	15	a
$[1.5, 2)$	22	0.22
$[2, 2.5)$	m	0.25
$[2.5, 3)$	14	0.14
$[3, 3.5)$	6	0.06
$[3.5, 4)$	4	0.04
$[4, 4.5)$	2	0.02
合计	100	1.00

A. 0.15 B. 0.075 C. 0.3 D. 15

- 4 中国女排，曾经十度成为世界冠军，铸就了响彻中华的女排精神、看过电影“夺冠”后，某大学掀起“学习女排精神，塑造健康体魄”的年度主题活动，一段时间后，学生的身体素质明显提高，现随机抽取 800 个学生进行体能测试，成绩的频率分布直方图如图，数据分成六组 $[40, 50)$ ， $[50, 60) \dots [90, 100]$ ，则成绩落在 $[70, 80)$ 上的人数为（ ）。



A. 12 B. 120 C. 24 D. 240



离散型随机变量分布列

- 5 某批产品共 10 件，其中含有 2 件次品。若从该批产品中任意抽取 3 件，则取出的 3 件产品中恰好有一件次品的概率为 _____；取出的 3 件产品中次品的件数 X 的期望是 _____。
- 6 一袋中装有 6 个大小相同的黑球和白球。已知从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{4}{5}$ ，则袋中白球的个数为 _____；从袋中任意摸出 2 个球，则摸到白球的个数 X 的数学期望为 _____。



- 7 秉承提升学生核心素养的理念，学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程，选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项，已知会唱歌的有 2 人，会跳舞的有 5 人，现从中选 2 人，设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数，其中 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$ ，则选该艺术课程的学生人数为 _____， ξ 的 $E\xi$ 是 _____。
- 8 为了抗击新冠肺炎疫情，现从 A 医院 150 人和 B 医院 100 人中，按分层抽样的方法，选出 5 人加入“援鄂医疗队”，现拟再从此 5 人中选出两人作为联络人，则这两名联络人中 B 医院至少有一人的概率是 _____。设两名联络人中 B 医院的人数为 X ，则 X 的期望为 _____。
- 9 某中学的十佳校园歌手有 6 名男同学，4 名女同学，其中 3 名来自 1 班，其余 7 名来自其他互不相同的 7 个班，现从 10 名同学中随机选择 3 名参加文艺晚会，则选出的 3 名同学来自不同班级的概率为 _____，设 X 为选出 3 名同学中女同学的人数，则该变量 X 的数学期望为 _____。



样本的数字特征

- 10 已知一个样本为 $x, 1, y, 5$ ，若该样本的平均数为 2，则它的方差的最小值为 ()。
- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2



分层抽样

- 11 某中学高一、高二、高三年级的学生人数之比依次为 6:5:7，防疫站欲对该校学生进行身体健康调查，用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 n 的样本，样本中高三年级的学生有 21 人，则 n 等于 ()。
- A. 35 B. 45 C. 54 D. 63
- 12 某学校三个社团的人员分布如下表（每名同学只参加一个社团）：

	合唱社	粤曲社	武术社
高一	45	30	a
高二	15	10	20

学校要对这三个社团的活动效果进行抽样调查，按分层抽样的方法从社团成员中抽取 30 人，结果合唱社被抽出 12 人，则这三个社团人数共有 _____。



概率

- 13 从 11 至 14 世纪涌现出一批著名的数学家和其创作的数学著作，如秦九韶的《数书九章》，李冶的《测圆海镜》，杨辉的《详解九章算法》、《日用算法》和《杨辉算法》。某学校团委为拓展学生课外学习兴趣，现从上述五部著作中任意选择两部作为学生课外拓展学习的参考书目，则所选的两部中至少有一部不是杨辉著作的概率为 _____。
- 14 袋子中有 6 个大小质地完全相同的球，其中 1 个红球，2 个黄球，3 个蓝球，从中任取 3 个球，则恰有两种颜色的概率是 ()。
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{7}{20}$ D. $\frac{13}{20}$
- 15 现有甲、乙、丙、丁、戊 5 种在线教学软件，若某学校从中随机选取 3 种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有 2 种被选取的概率为 _____。
- 16 已知甲、乙两人独立出行，各租用共享单车一次（假定费用只可能为 1、2、3 元）。甲、乙租车费用为 1 元的概率分别是 0.5、0.2，甲、乙租车费用为 2 元的概率分别是 0.2、0.4，则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为 ()。
- A. 0.18 B. 0.3 C. 0.24 D. 0.36



二项式定理



常数项

- 17 二项式 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 _____。
- 18 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中，常数项是 _____。
- 19 若 $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 -160，则实数 $a =$ _____。



项的系数

- 20 $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 _____。（用数字作答）
- 21 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 x 项的系数为 _____。（用数字作答）
- 22 二项式 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^6 项的系数为 _____。



系数和 / 二项式系数和

- 23 已知二项式 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 32，则展开式中含 x 项的系数是 _____。



第 7 讲

概率统计及计数原理专项复习



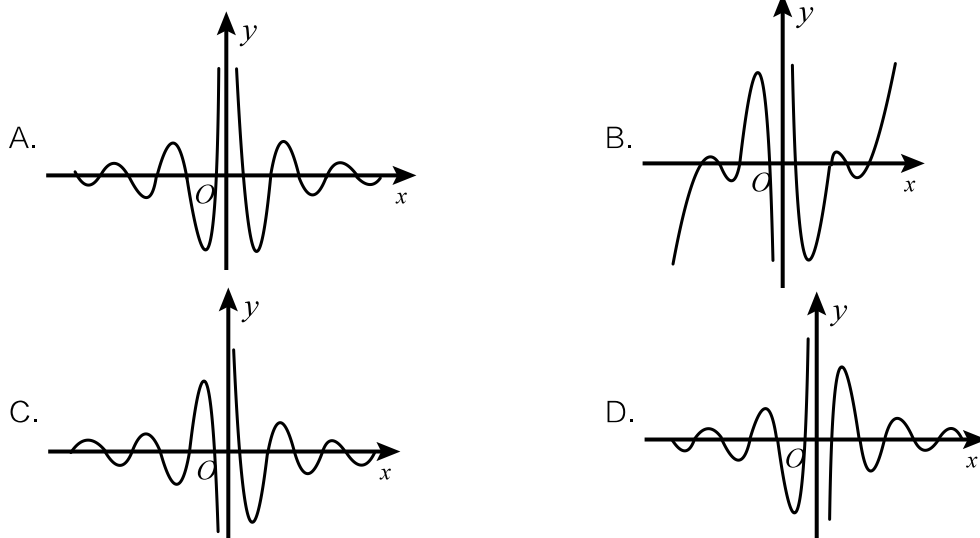


选择题

- 1 (5分) 设集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}$, 集合 $N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $\complement_M N = (\quad)$.
 A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

- 2 (5分) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $\frac{1}{x} < 1$ ” 是 “ $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$ ” 的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

- 3 (5分) 若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 ().



- 4 (5分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增则 ().
 A. $f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(2^{-\pi})$ B. $f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi)$
 C. $f(2^{-\pi}) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(\log_2 \pi)$ D. $f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)$

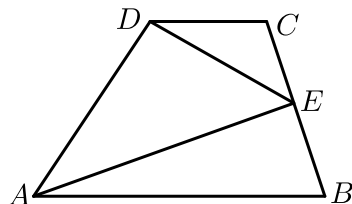
- 5 (5分) 袋中装有标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 且大小相同的 6 个小球, 从袋子中一次性摸出两个球, 记下号码并放回, 如果两个号码的和是 3 的倍数, 则获奖, 若有 5 人参与摸球, 则恰好 2 人获奖的概率是 ().

- A. $\frac{40}{243}$ B. $\frac{70}{243}$ C. $\frac{80}{243}$ D. $\frac{38}{243}$

- 6 (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $a = 1$, $c = 2\sqrt{3}$, $b \sin A = a \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right)$, 则 $\sin C = (\quad)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$

- 7 (5分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m)$ 到其焦点的距离为 5, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A 且离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 垂直, 则双曲线的方程为 ().
- A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ C. $x^2 - 2y^2 = 1$ D. $x^2 - 4y^2 = 1$
- 8 (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + (x-t)^2}{x}$, $t \in \mathbf{R}$, 若存在 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得 $f(x) + xf'(x) > 0$, 则实数 t 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, \sqrt{2})$ B. $(-\infty, \frac{3}{2})$ C. $(-\infty, \frac{9}{4})$ D. $(-\infty, 3)$
- 9 (5分) 如图梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$, $AD = 2DC = 4$, E 在线段 BC 上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ().

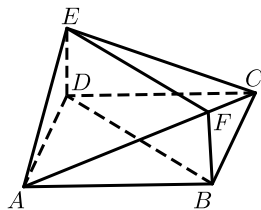


- A. $\frac{15}{13}$ B. $\frac{95}{13}$ C. 15 D. $-\frac{15}{13}$



填空题

- 10 (5分) 若复数 $2 + i = (1 + i)(a + bi)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 其中 i 是虚数单位, 则 $b =$ _____.
- 11 (5分) $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中, $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为 _____.
- 12 (5分) 已知如图所示的多面体 $EF-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 四边形 $BDEF$ 是矩形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 若 $BF = BD = 2$, 则多面体的体积 _____.



- 13 (5分) 若圆 $C_1: (x+a)^2 + y^2 = 8 + a^2$ ($a > 0$) 与圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 则圆 C_2 上位于 AB 右方的点到 AB 的最长距离为 _____.



14 (5分) 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 _____.

15 (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & -3 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) + |x - 2| - kx = 0$ 有且只有三个不相等的实数解, 则实数 k 的取值范围是 _____.



解答题

16 (14分) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$,

(1) (6分) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

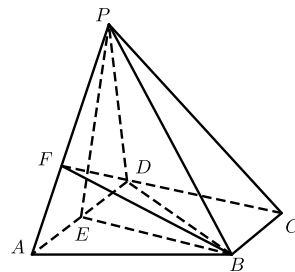
(2) (8分) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

- 17 (15分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ 且 $CD = \sqrt{3}$, E 为 AD 的中点, F 是棱 PA 的中点, $PA = 2$, $PE \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp CD$.

(1) (5分) 证明: $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) (4分) 求二面角 $P-BD-F$ 的正弦值.

(3) (6分) 在线段 PC (不含端点) 上是否存在一点 M , 使得直线 BM 和平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$? 若存在, 求此时 PM 的长, 若不存在, 说明理由.





18 (15分) 如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是椭圆上的一点.

(1) (5分) 求椭圆的标准方程.

(2) (10分) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.

① (5分) 求证: $OM \perp MN$.

② (5分) 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

- 19 (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.
- (1) (5分) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) (4分) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;
- (3) (6分) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.



20 (16分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x\ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) (5分) 求实数 b 的值.

(2) (5分) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) (6分) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.