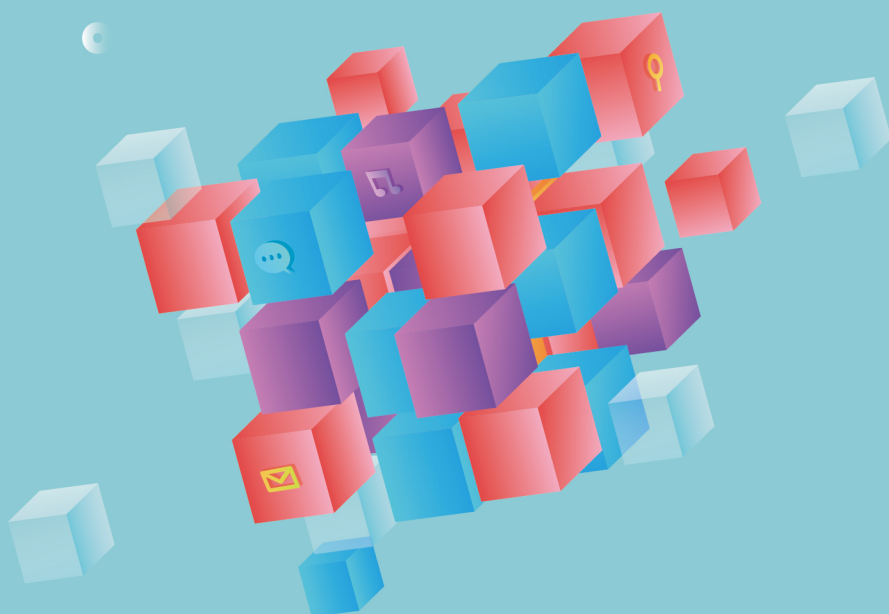
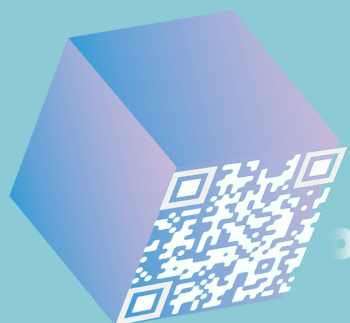


知识魔方

i 数学



主 编：马建明

本模块制作人：吕金琳

本模块审核人：闫聪聪

封面设计：林梦涵

教研团队：高中数学组

前言

学而思爱智康产品升级介绍

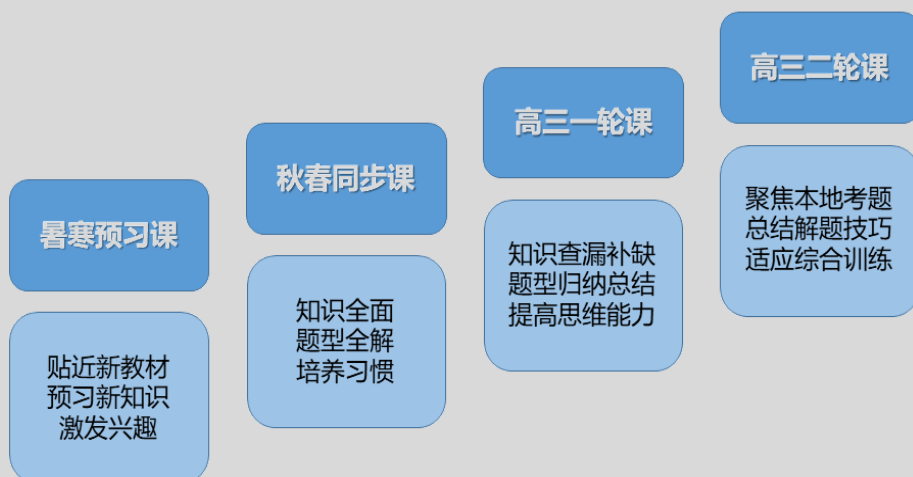
新教材改革已经如火如荼地展开，智康新产品助学助考的开发问题已成为家长和学子重点关注的焦点。应广大家长和学子的需求，我们带领最优质的高中理科教师团队制作出最新人教版教材的全模块切片产品。该系列产品能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照新教材理念科学高效的学习。该书以“三次课学懂一个模块”为宗旨，帮你轻松找到学习目标，助你走向成功。

这套产品在整体设计上有四个突出的特点：

- (1) 标准教学大纲变为专属大纲，并且可以随时调整
- (2) 讲义 + 习题册，形成测、讲、评、练学习闭环
- (3) 难度阶梯分明，在学科层次上由浅入深、给不同程度的学生都能带来持续的进步
- (4) 针对本地考卷进行大数据分析，精选例题，直击考点

如果你在使用的过程中发现有那里需要改正或者优化，希望优秀的你能够给予我更多的建议与意见，帮助我更好的提升自己。

高中理科产品课程体系



扫描右侧二维码
提出你的意见与建议吧



高二数学课程产品设计

考点占比：让同学们更加清楚本模块知识在高考中的地位。

考点分析：以大数据方式分析考试重点难点，紧扣考试热点，让同学们的复习更具针对性。

知识导图：梳理知识结构，帮助同学们形成网络状的知识图谱，更有助于对知识点的理解记忆。

典型例题：分析考试情况，精选最新的考题，让同学们清楚每一个知识点的考法。

巩固练习：匹配同类型题目，讲练结合，锻炼提升解题能力。

本模块介绍

基本初等函数模块在必修 1 中出现，属于函数分支知识点。本章内容主要包括指数对数的运算、指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质。

在之前我们已经初步复习了函数的单调性及奇偶性，而在此讲，结合我们学习的基本初等函数性质后，就是我们高考的考点之一了。

此讲内容一般会单独考察指对数比较大小，此类题偶尔和奇偶性单调性结合考察；其次是在函数与方程的零点问题内，结合图像分析求解；再者便是和导数结合进行相应考察。

学生可以通过本节模块课程的学习，掌握高考基本初等函数相关的重点题型。

目 录

第 1 讲 指数函数与对数函数..... 01

- 知 识 点 1 指数运算及指数函数
- 知 识 点 2 对数运算及对数函数
- 知 识 点 3 指对数的运算
- 知 识 点 4 判断函数图像
- 知 识 点 5 比较大小
- 知 识 点 6 求解不等式
- 知 识 点 7 单调性问题

第 2 讲 幂函数与函数零点初步.....11

- 知 识 点 1 幂函数的相关知识
- 知 识 点 2 幂函数典型题
- 知 识 点 3 零点的概念
- 知 识 点 4 不含参函数零点典型题
- 知 识 点 5 一元二次方程根的分布
- 知 识 点 6 三次函数零点分析

第 3 讲 函数零点综合问题（一）.....19

- 知 识 点 1 零点存在性定理
- 知 识 点 2 根据零点信息确定参数取值范围
- 知 识 点 3 函数零点的关系

第 4 讲 函数零点综合问题（二）.....23

- 知 识 点 1 分段函数的零点
- 知 识 点 2 复合函数的零点



我们一起开始学习吧 o(*^_^*)o



第 1 讲

指数函数与对数函数

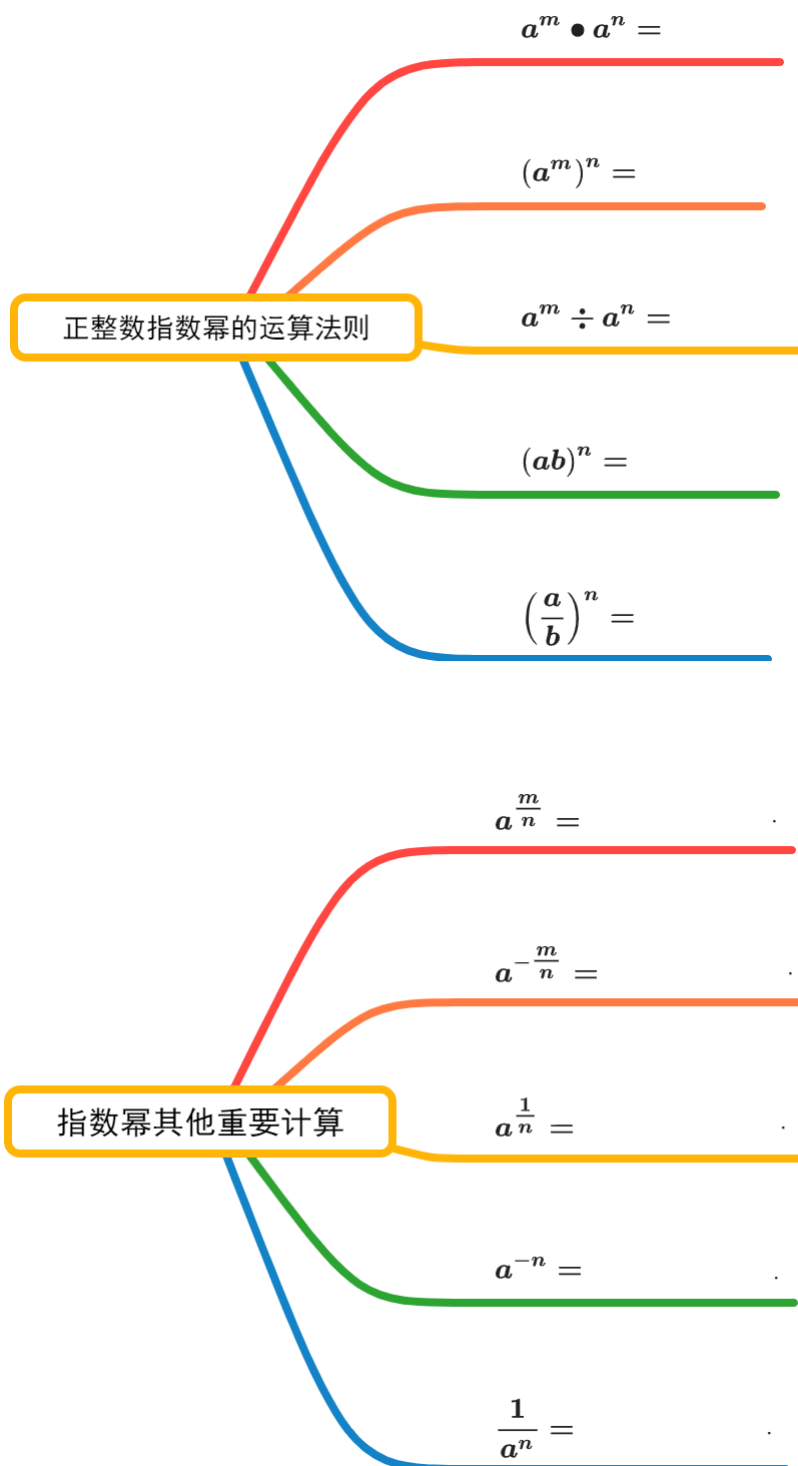




指数运算及指数函数



指数函数运算法则





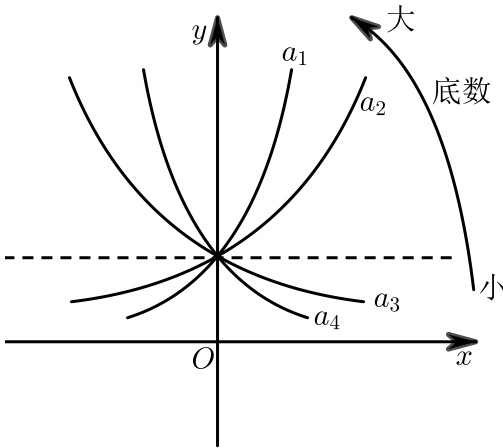
指数函数的图像

		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域	_____	
	值域	_____	
	过定点	图象过定点 _____	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上 是 _____ 函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上 是 _____ 函数
	函数值的变化范围	当 $x < 0$ 时, _____	当 $x < 0$ 时, _____
		当 $x = 0$ 时, _____	当 $x = 0$ 时, _____
		当 $x > 0$ 时, _____	当 $x > 0$ 时, _____



底数对指数函数的影响

底数对函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图象的影响如图 ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4$). 在第一象限具有 “**底大图高**” 的特征.

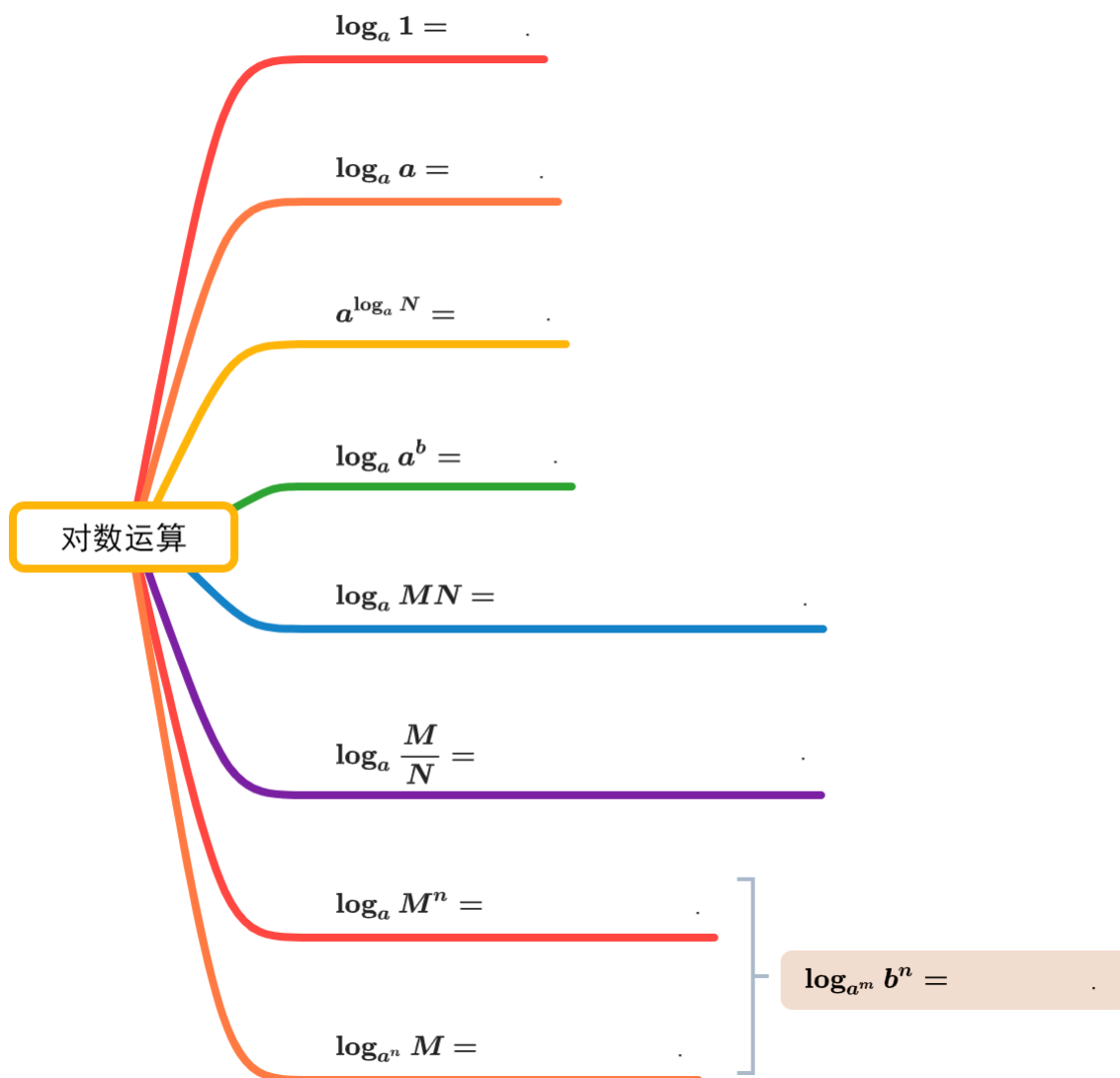




对数运算及对数函数



对数运算法则



【仅教师可见】对数运算：

- ① 0 ② 1 ③ N ④ b ⑤ $\log_a M + \log_a N$ ⑥ $\log_a M - \log_a N$
 ⑦ $n \log_a M$ ⑧ $\frac{1}{n} \log_a M$ ⑨ $\frac{n}{m} \log_a b$



对数函数的图像

		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域		
	值域		
	过定点		
	单调性	在 $(0, +\infty)$ 上是____函数	在 $(0, +\infty)$ 上是____函数
	函数值的变化范围	当 $0 < x < 1$ 时, _____	当 $0 < x < 1$ 时, _____
		当 $x = 1$ 时, _____	当 $x = 1$ 时, _____
		当 $x > 1$ 时, _____	当 $x > 1$ 时, _____

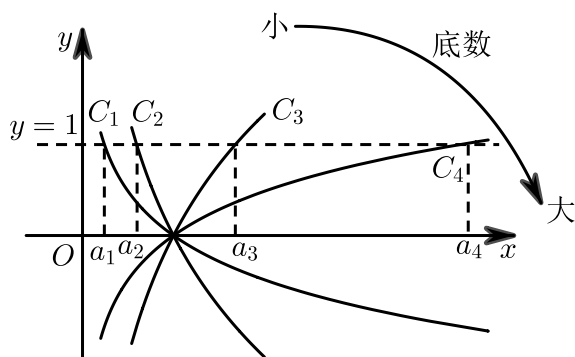


底数对对数函数的影响

当 $x > 1$ 时“**底大图低**”，即若 $a > b$ ，则 $y_1 < y_2$ ；

当 $0 < x < 1$ 时“**底大图高**”，即若 $a > b$ ，则 $y_1 > y_2$ 。

这一性质可通过下图帮助理解，其中， C_1, C_2, C_3, C_4 分别是函数 $y = \log_{a_1} x$, $y = \log_{a_2} x$, $y = \log_{a_3} x$, $y = \log_{a_4} x$ 的图象，则必有 $a_4 > a_3 > 1 > a_2 > a_1 > 0$ 。



常见题型



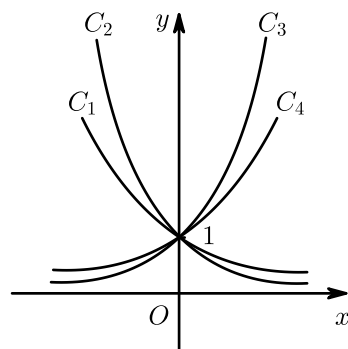
指对数的运算

- 1 函数 $y = 3 + \log_a (3x - 2)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过定点 ().
 A. $(0, \frac{11}{3})$ B. $(1, 0)$ C. $(1, 3)$ D. $(\frac{2}{3}, 3)$
- 2 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ____.

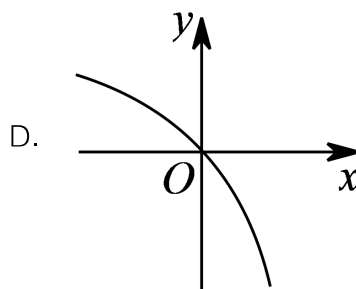
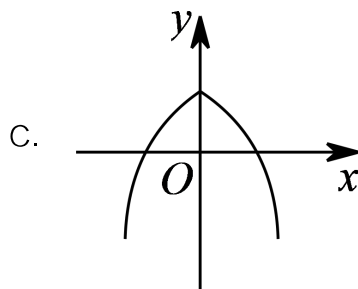
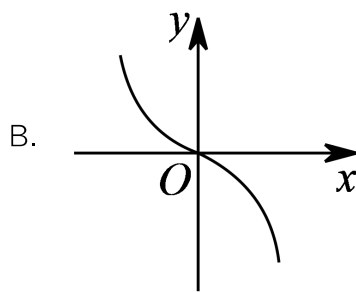
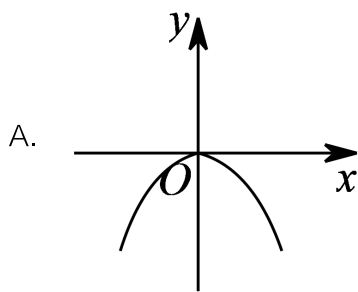


判断函数图像

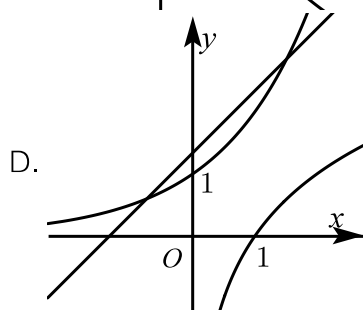
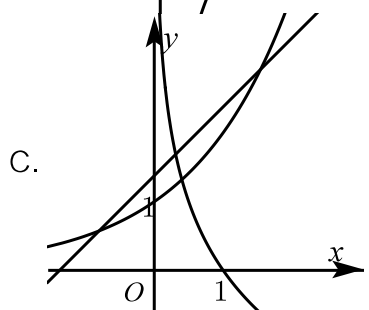
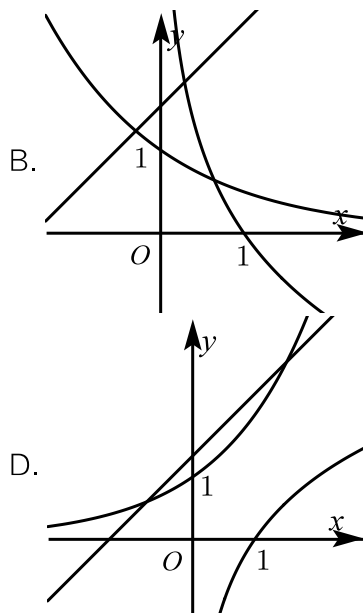
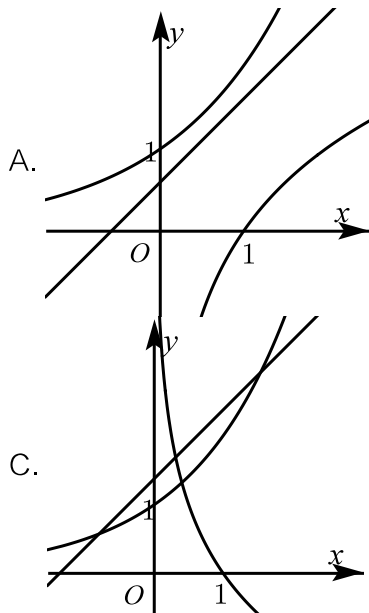
- 3 曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 分别是指数函数 $y_1 = (\frac{3}{\pi})^x, y_2 = 0.9^x, y_3 = (\frac{\pi}{2})^x, y_4 = 1.7^x$ 的图象, 则 C_1, C_2, C_3, C_4 分别代表哪个指数函数 ____.



- 4 函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 的图象大致是 ().



- 5 在同一坐标系中画出函数 $y = \log_a x$, $y = a^x$, $y = x + a$ 的图象, 可能正确的是 ().



比较大小



指对数比较大小

- 6 设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$, $c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$
- 7 设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 2$, $c = \log_2 3$, 则 ().
- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
- 8 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_4 7$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$
- 9 设 $a = 4^{0.8}$, $b = 8^{0.46}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$



结合奇偶性、单调性比较大小

- 10 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，设 $a = 3^{0.3} \cdot f(3^{0.3})$ ， $b = (\log_{\pi} 3) \cdot f(\log_{\pi} 3)$ ， $c = \left(\log_3 \frac{1}{9}\right) \cdot f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right)$ ，则 a, b, c 之间的大小关系为 () .
- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$
- 11 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数， $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-\log_2 5.1)$ ， $b = g(2^{0.8})$ ， $c = g(3)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
- 12 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数，记 $a = f(\log_{0.5} 3)$ ， $b = f(\log_2 5)$ ， $c = f(2m)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
- 13 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[1-3m, 2m]$ 上的偶函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单调递增，若 $a = f(m)$ ， $b = f(2^{-0.4})$ ， $c = f\left(\log_4 \frac{1}{5}\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系是 () .
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$



精进不休 日新月异

- 14 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ， $a = f(2^{0.3})$ ， $b = f(0.2^{0.3})$ ， $c = f(\log_{0.3} 2)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .
- A. $b < a < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$



结合对称性、单调性比较大小

- 15 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数，令 $a = \ln 2$ ， $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 2$ ，则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 () .
- A. $f(b) < f(c) < f(a)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$
- 16 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x) = f(3+x)$ ，且对任意 $x_1, x_2 \in (0, 3)$ 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，若 $a = 2^{-\sqrt{3}}$ ， $b = \log_2 3$ ， $c = e^{\ln 4}$ ，则下面结论正确的是 () .
- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(c) < f(a) < f(b)$
C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(a) < f(c) < f(b)$

精进不休 日新月异

- 17 已知函数 $y = f(x+1)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x^3 + \ln(1-x)$, 记 $a = f(\log_3 6)$, $b = f(\log_4 8)$, $c = f(\log_5 10)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$



求解不等式

豪厘不伐 将用斧柯

- 18 不等式 $(x^2 - 2)\log_{0.5} x < 0$ 的解集是 _____.



含参恒能成立问题

- 19 若不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+ax} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+a-2}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $[-2, 2]$ B. $(-2, 2)$ C. $[0, 2]$ D. $[-3, 3]$
- 20 已知对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $\frac{1}{2^{x^2+x}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-mx+m+4}$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 ().
- A. $(-3, 5)$ B. $(-2, 5)$ C. $(-2, 6)$ D. $(-3, 6)$



利用单调性、奇偶性

- 21 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $[1, 2]$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ D. $(0, 2]$



豪厘不伐 将用斧柯

- 22 设函数 $f(x) = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + 3x^3$ ($-2 < x < 2$), 则使得 $f(2x) + f(4x-3) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().
- A. $(-1, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$



精进不休 日新月异

- 23 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且 $f(x+1)$ 关于直线 $x = -1$ 对称. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}x^2+1}, & 0 \leq x < 2 \\ 2 - \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若对任意的 $x \in [m, m+1]$, 不等式 $f(2-2x) \geq f(x+m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $\left[-\frac{1}{4}, 0\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $[1, +\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$



函数定义域、值域经典问题

- 24 已知函数 $y = \lg(ax^2 - 2x + 2)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的取值范围为 _____。
- 25 若函数 $f(x) = \log_2(ax^2 + ax + 1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的函数，则 a 的取值范围是 ()。
- A. $(4, +\infty)$ B. $(-\infty, 4)$ C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, 4]$
- 26 已知函数 $f(x) = \lg(2^x + a - 4)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则 a 的取值范围是 ()。
- A. $(-2, 2)$ B. $(2, 4)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$



单调性问题



求解复合函数单调性

- 27 函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-4x+3}$ 的单调递增区间是 ()。
- A. $(-\infty, -2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2]$
- 28 函数 $f(x) = \lg(-x^2 + x + 6)$ 的单调递减区间为 ()。
- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$



含参问题

- 29 若函数 $y = \log_a(x^2 - ax + 2)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上为减函数，则 a 的取值范围是 ()。
- A. $(0, 1)$ B. $[2, 3)$ C. $[2, +\infty)$ D. $(1, 3)$
- 30 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 6)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围为 ()。
- A. $[4, +\infty)$ B. $[4, 5)$ C. $[4, 8)$ D. $[8, +\infty)$

第 2 讲

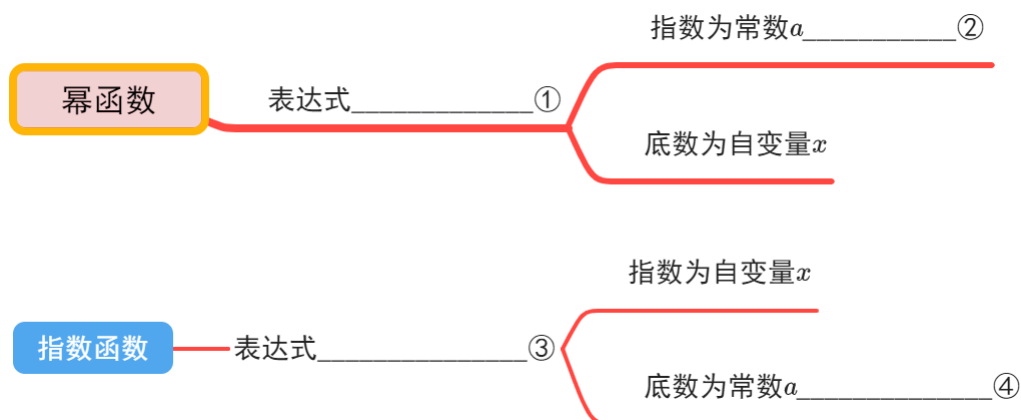
幂函数与函数零点初步





幂函数的相关知识

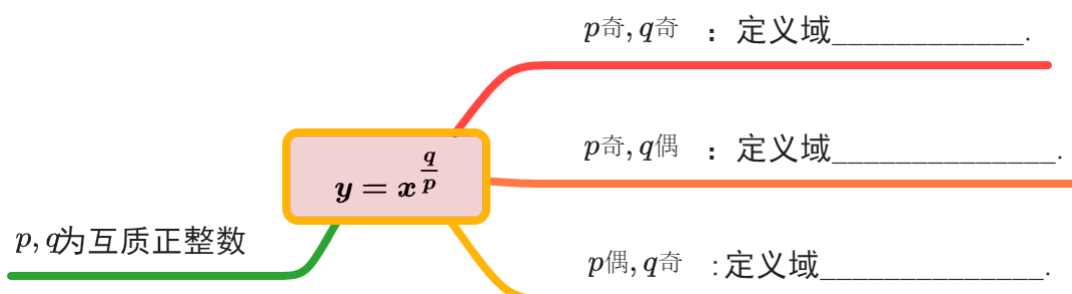
1. 幂函数与指数函数的区别



2. 借助图像观察幂函数的特征

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					

3. 幂函数定义域的判断



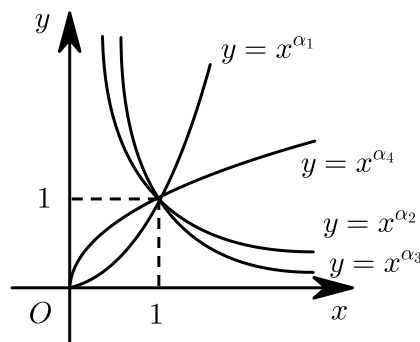


幂函数典型题



图像及定义问题

- 1 如图所示，幂函数 $y = x^a$ 在第一象限的图象，比较 $0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1$ 的大小 () .



- A. $\alpha_1 < \alpha_3 < 0 < \alpha_4 < \alpha_2 < 1$ B. $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1$
 C. $\alpha_2 < \alpha_4 < 0 < \alpha_3 < 1 < \alpha_1$ D. $\alpha_3 < \alpha_2 < 0 < \alpha_4 < 1 < \alpha_1$
- 2 设 $a \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$ ，则使函数 $y = x^a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 的所有 a 的值为 () .
- A. 1, 3 B. -1, 1 C. -1, 3 D. -1, 1, 3



利用定义判断函数单调性、奇偶性问题

- 3 若 $x > y > 1, 0 < a < 1$ ，则下列各式中正确的是 () .
- A. $\log_{\frac{1}{a}} x < \log_{\frac{1}{a}} y$ B. $a^x > a^y$ C. $x^{-a} > y^{-a}$ D. $x^a > y^a$
- 4 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{3+2m-m^2}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 在 $(0, +\infty)$ 是单调减函数，且为偶函数.
求 $f(x)$ 的解析式.

- 5 已知幂函数 $f(x) = (m-1)^2 x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.



比较大小

- 6 已知点 $(m, 9)$ 在幂函数 $f(x) = (m-2)x^n$ 的图象上，设 $a = f(m^{-\frac{1}{3}})$ ， $b = f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$ ， $c = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，
则 a, b, c 的大小关系为 () .
- A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

- 7 已知点 $(m, 8)$ 在幂函数 $f(x) = (m-1)x^n$ 的图象上, 设 $a = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, $b = f(\ln \pi)$, $c = f\left(-\frac{1}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().
- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$
- 8 若 $x > y > 1$, $0 < a < b < 1$, 则下列各式中一定成立的是 ().
- A. $x^a > y^b$ B. $x^a < y^b$ C. $a^x < b^y$ D. $a^x > b^y$



解不等式

- 9 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 $x^3 < 1$ 的 ().
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

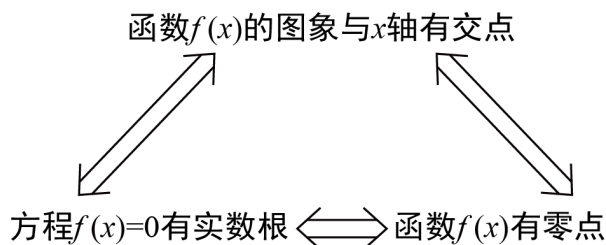


零点的概念

1. 零点的概念

①使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $f(x)$ 的零点

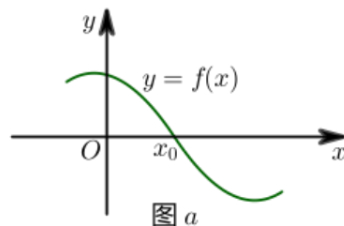
②不同表述:



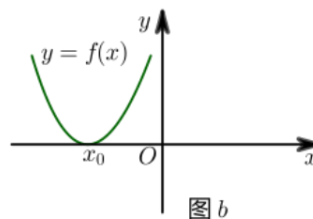
2. 零点的分类

零点分类

变号零点: 零点附近两侧的函数值异号



不变号零点: 零点附近两侧的函数值同号





不含参函数零点典型题

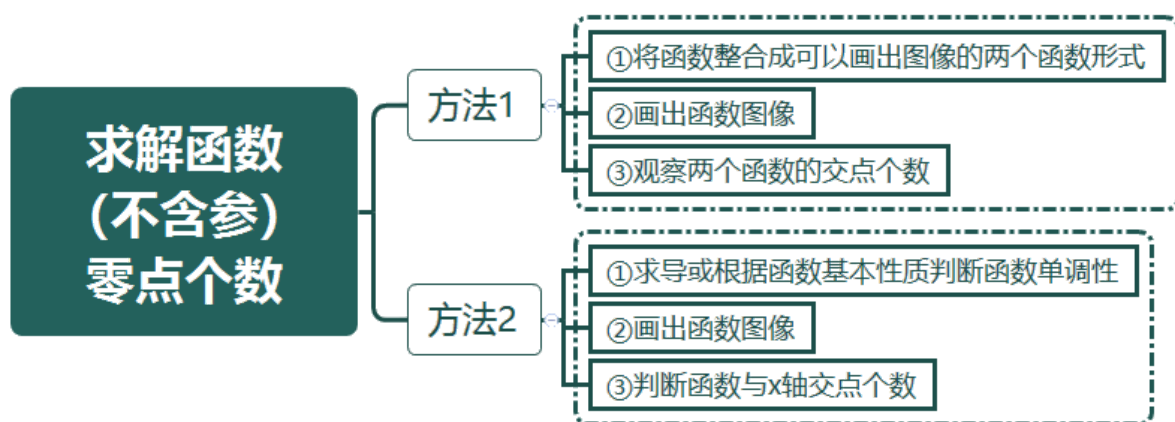


求解确定函数零点

- 10 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ 。则函数 $g(x) = f(x) - x + 3$ 的零点的集合为 ()。
- A. $\{1, 3\}$ B. $\{-3, -1, 1, 3\}$ C. $\{2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$ D. $\{-2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$
- 11 下列函数没有零点的是 ()。
- A. $f(x) = (x + 2) \ln x$ B. $f(x) = \cos \pi x - e^{|x|}$
C. $f(x) = e^x + \ln(x + 1) - 1$ D. $f(x) = e^{-\ln x} + \sin x + 1$



根据函数图像判断零点个数



- 12 函数 $f(x) = x^2 + \ln|x|$ 的零点的个数为 ()。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 13 函数 $f(x) = e^x |\ln x - 1| - 1$ 的零点个数是 ()。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 14 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x-1}$ 的零点的个数为 _____。
- 15 已知 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ，则 $f(x)$ 零点个数 _____。



精进不休 日新月异

- 16 函数 $f(x) = x^2 - 4x - 2 \ln x + 5$ 的零点个数为 ()。
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0



豪厘不伐 将用斧柯

17 函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 零点个数是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

18 函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$.

(1) 若 $f(x)$ 有且只有一个零点, 求 m 的值.

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点且均比 -1 大, 求 m 的取值范围.

19 关于 x 的方程 $x^2 - 2|x| - a = 1$ 有两个不等的实根, 则 a 的取值范围是 ____.

20 已知 $f(x) = x^2 + (a^2 - 1)x + (a - 2)$ 的一个零点比 1 大, 一个零点比 1 小, 则实数 a 的取值范围是 ____.

21 关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 3 = 0$ 的两实根都大于 2 , 则实数 m 的取值的集合是 ____.

- 22 若方程 $x^2 + (1 - k)x - 2(k + 1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $(3, 4)$ B. $(2, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(1, 2)$



三次函数零点分析

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$				
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \Delta = 4b^2 - 12ac.$				
判别式				
导数值情况				
$f(x)$ 单调性				
$f(x)$ 极值				
图像				
零点 个数				

- 23 若方程 $x^3 - 3ax + 2 = 0$ 有三个不同实根, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $a > 0$ B. $a > 1$ C. $1 < a < 3$ D. $0 < a < 1$
- 24 已知函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a (a > 0)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围.



包罗万象 举一反三

- 25 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - a$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

第 3 讲

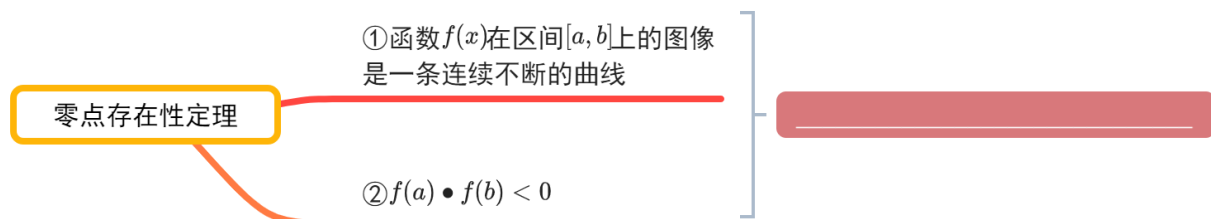
函数零点综合问题（一）



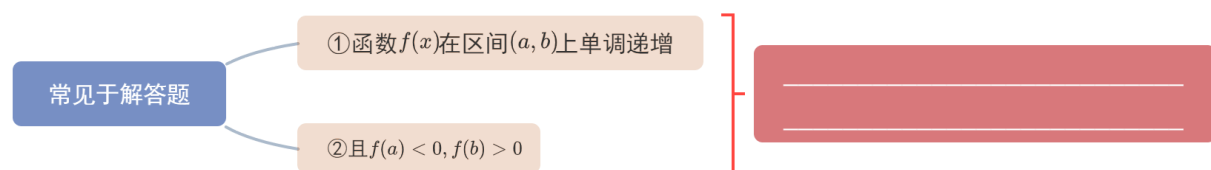


零点存在性定理

1. 零点存在性定理



2. 零点存在性定理的常见应用形式



- 函数 $y = x^3$ 与 $y = 2^x + 1$ 的图象的交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在区间是 ().
A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
- 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是 ().
A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
- 函数 $f(x) = 3^x - \log_2(-x)$ 的零点所在区间是 ().
A. $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$ B. $(-2, -1)$ C. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ D. $(1, 2)$
- 函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$ 的零点所在区间为 ().
A. $(-4, -3)$ B. $(-3, -e)$ C. $(-e, -2)$ D. $(-2, -1)$
- 设函数 $f(x) = e^x + x - 2$, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$, 若实数 a, b 满足 $f(a) = 0, g(b) = 0$, 则 ().
A. $0 < g(a) < f(b)$ B. $f(b) < g(a) < 0$ C. $f(b) < 0 < g(a)$ D. $g(a) < 0 < f(b)$
- 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 对于任意的 x 都满足 $f(x+1) = -f(x)$, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, $f(x) = x^3$, 若 $g(x) = \lg x$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象交点个数为 _____.



根据零点信息确定参数取值范围

由函数零点与函数图象的关系, 有些零点问题可以转化为函数图象与 x 轴的交点问题或两函数图象的交点问题解决.

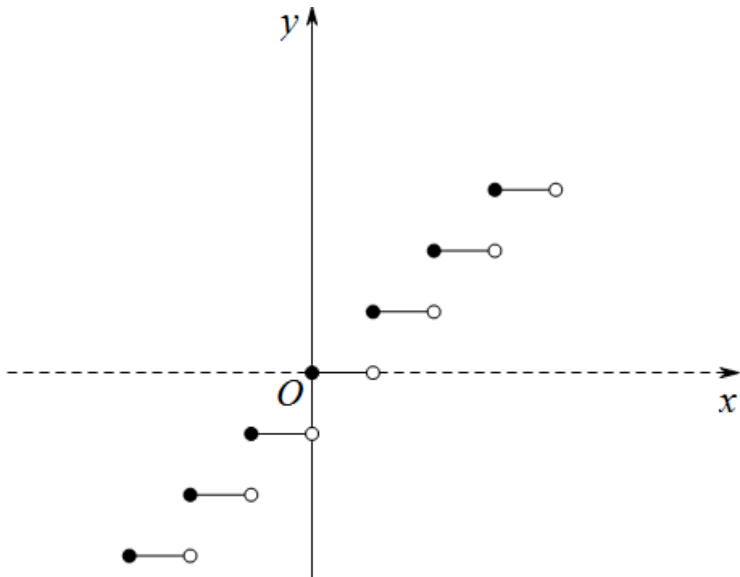
- 已知 $f(x) = |\ln x|$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有唯一的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

- 8 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = \ln x$, 若在区间 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 内, 曲线 $g(x) = f(x) - ax$ 与 x 轴有三个不同的交点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ B. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{e}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$ D. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{2e}\right)$
- 9 函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ 有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(0, 2)$ B. $(2, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- 10 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$ 在 $(0, 2)$ 上有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.
- 11 设 $f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & x \leq 0 \\ f(x-1), & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = x + a$ 有且仅有三个解, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, 2]$ D. $[1, +\infty)$
- 12 已知函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 有零点, 则 a 的取值范围是 _____.
- 13 若函数 $y = x + \frac{a}{x} + 1$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 14 已知当 $x \in [0, 1]$ 时, 函数 $y = (mx - 1)^2$ 的图象与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图象有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, 1] \cup [3, +\infty)$
C. $(0, \sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$



补充：取整函数（高斯函数）

$f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[-1.2] = -2$, $[1] = 1$, $[2.5] = 2$), 其图象如下:



- 15 已知函数 $f(x) = x - [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 若关于 x 的方程 $f(x) = kx + k$ 有三个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$

B. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

C. $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$

D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$

- 16 已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{2}{x} + a$, $a \in \mathbf{R}$, 若方程 $f(x) = 1$ 有且只有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 _____.



函数零点的关系

一般借助函数的图像, 研究零点满足的**对称性或周期性**, 探究两个或多个零点之间的关联性。

- 17 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 2 \cos \pi x$ ($-4 \leq x \leq 6$) 的所有零点之和为 _____.

- 18 定义在 $\{x|x \in \mathbf{R}, x \neq 1\}$ 上的函数 $f(1-x) = -f(1+x)$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \cos \pi \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($-3 \leq x \leq 5$) 的所有零点之和等于 _____.

- 19 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$, 则方程 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 在 $(0, 6)$ 内的所有根之和为 _____.

第 4 讲

函数零点综合问题（二）





分段函数的零点



分段函数零点个数 (画图找交点)

- 1 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数且 $f(x) = f(2-x)$, 已知 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = \sin x$, 则函数 $g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ 在区间 $[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}]$ 上的所有零点之和为 ().
- A. 6 B. 7 C. 13 D. 14
- 2 若关于 x 的方程 $2^x - \frac{1}{x-1} - a = 0$ 有负实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(2, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 1)$



利用零点信息求解参数取值范围

- 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ f(2e-x), & e < x < 2e \end{cases}$, 函数 $F(x) = f(x) - ax$ 有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 4 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $[0, \ln 2]$ B. $(-2 - \ln 2, 0)$ C. $(-2 - \ln 2, 0]$ D. $[0, 2 + \ln 2)$
- 5 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + \frac{1}{x}, & x > 1 \\ 2x^2 - mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}, & x \leq 1 \end{cases}$ 若 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.
- 6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.
- 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(|x^2-x| + x^2 + x), & x > -1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = k(x-1)$ 有唯一的实数解, 则 k 的取值集合为 _____.
- 8 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \\ a|x + \frac{1}{2}| - \frac{15}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$. 函数 $g(x) = x^3$. 若方程 $g(x) = xf(x)$ 有 4 个不同实根, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $(5, \frac{15}{2})$ B. $(5, \frac{15}{2}]$ C. $(-3, 5)$ D. $(3, 5)$



分段函数零点特征

- 9 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, x \geq 0 \\ -\frac{1}{x}, x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - t$ 有三个不同的零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ 的取值范围是 _____.
- 10 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$, $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的所有实根之和为 _____.
- 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_3 x|, 0 < x < 3 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right), 3 \leq x \leq 15 \end{cases}$, 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $\frac{(x_3-3)(x_4-3)}{x_1x_2}$ 的取值范围是 ().
A. (0, 27) B. (0, 45) C. (27, 45) D. (45, 72)
- 12 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, x \leq 0 \\ |\log_2 x|, x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{x_1+x_2}{x_4} + \frac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围是 _____.
- 13 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{5}x + 3, x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 均不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 _____.



复合函数的零点



利用零点信息求解参数取值范围

- 14 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{|x|}$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - 2af(x) + a - 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 有 3 个相异的实数根, 则 a 的取值范围是 ().
A. $\left(\frac{e^2-1}{2e-1}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{e^2-1}{2e-1}\right)$ C. $\left(0, \frac{e^2-1}{2e-1}\right)$ D. $\left\{\frac{e^2-1}{2e-1}\right\}$
- 15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f^2(x) + bf(x) + \frac{1}{4} = 0$ 有六个相异实根, 则实数 b 的取值范围 ().
A. $(-2, 0)$ B. $(-2, -1)$ C. $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$



- 16 已知函数 $f(x) = |\log_2 |x - 1||$, 且关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + 2b = 0$ 有 6 个不同的实数解, 若最小的实数解为 -1 , 则 $a + b$ 的值为 ().
A. -2 B. -1 C. 0 D. 1
- 17 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^{x+1}}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 + m = 0$ 恰有 3 个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 ().
A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ B. $(1 - \frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(1 - \frac{1}{e}, 1)$ D. $(1, e)$
- 18 设函数 $f(x) = 1 - |2x - 1|$, $x \in [0, 1]$. 函数 $g(x) = f(f(x)) - ax$ 有 4 个零点. 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 19 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $f(x) = \begin{cases} 5^{|x-1|} - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4, & x < 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - (2m+1)f(x) + m^2 = 0$ 有 7 个不同的实数解, 则 m 的值为 ().
A. 2 B. 6 C. 2 或 6 D. -2 或 -6
- 20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ x^2 + 4x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - bf(x) + c = 0 (b, c \in \mathbf{R})$ 有 8 个不同的实数根, 则 $b + c$ 的取值范围为 ().
A. $(-\infty, 3)$ B. $(0, 3]$ C. $[0, 3]$ D. $(0, 3)$
- 21 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $g[f(x)] - a = 0$ 的实数根的个数有 4 个, 则 a 的取值范围是 _____.
- 22 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $6[f(x)]^2 - f(x) - 1 = 0$ 的实根的个数为 ().
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
- 23 已知直线 $x - y = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ 图象的一条切线, 且关于 x 的方程 $f(f(x)) = t$ 恰有一个实数解, 则 ().
A. $t \in \{e \ln 2\}$ B. $t \in [0, e \ln 2]$ C. $t \in [0, 2]$ D. $t \in (-\infty, 0]$



复合函数零点特征

- 24 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} \ln|x - 4| (x \neq 4) \\ 1 (x = 4) \end{cases}$, 若关于的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 5 个不同的实根, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 则 $f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) =$ _____.